

Lösungsideen Klassenstufe 9/10 – Die Deko-Schnur

Lösungsweg:

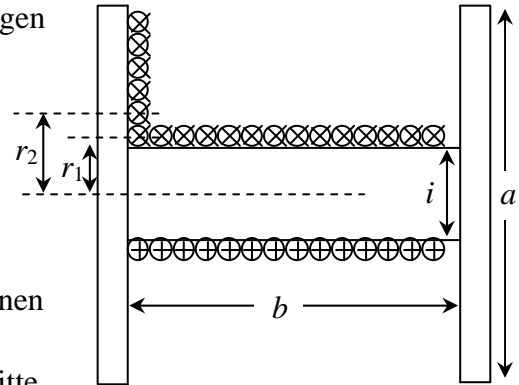
Hier ein paar Ideen, um die gewundenen Wege der Schnurwicklungen zu erforschen.

1. Das Lauter-Kreise-Modell

Die eigentlich aneinander anschließenden Schnurwindungen werden ersetzt durch einzelne, getrennte Kreise – die nämlich lassen sich relativ einfach berechnen.

Die Aufgabe wird also in vier Teilaufgaben zerlegt:

- Wie viele (Schnur-)Kreise passen nebeneinander?
- Wie viele Lagen Schnur passen auf die Rolle?
- Wie viel Meter Schnur passen jeweils in einen einzelnen Kreis der ersten (zweiten, dritten, vierten, ...) Lage?
- Wie viel Meter Schnur passen in die erste (zweite, dritte, vierte, ...) Lage der Rolle?



Die Wickelbreite b beträgt 1,9 cm, der Schnurdurchmesser $d = 0,4$ mm. Es passen rechnerisch 47,5 Kreise nebeneinander. Es können also 47 Schnüre in jeder Lage nebeneinander verlegt werden, und es bleiben jeweils 0,2 mm „Luft“.

Aus der Differenz von äußerem und innerem Radius $a/2 - i/2 = 3,5$ cm $- 2,75$ cm $= 0,75$ cm und dem Schnurdurchmesser ergibt sich rechnerisch, dass 18,75 Lagen aufeinander passen. Wenn die Schnurwindungen nicht über den äußeren Rand herausragen dürfen, bedeutet das 18 Lagen. (Im Gegensatz zur Wickelbreite ist der Platz hier aber nicht durch eine Wand begrenzt, so dass man auch noch geeignet weiterwickeln könnte... – das ist die Herausforderung der Zusatzaufgabe).

Um die Länge der Kreise in der k -ten Lage zu bestimmen, benötigt man die zugehörigen Radien r_k . Diese kann man Lage für Lage nacheinander berechnen:

Die erste Lage ergibt $r_1 = i/2 + d/2 = 2,77$ cm, $r_2 = r_1 + d = 2,81$ cm usw.

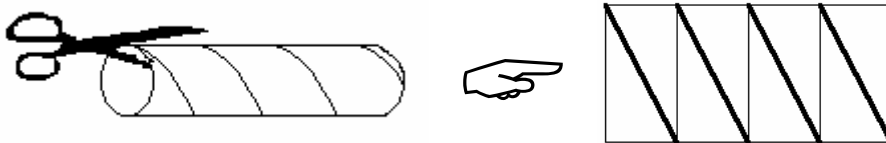
Daraus folgt für die Länge eines Kreisrings der ersten Lage $2 \cdot \pi \cdot r_1 \approx 17,4$ cm und für die komplette erste Lage $L_1 = 47 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r_1) \approx 818$ cm.

Entsprechend ergeben sich für die komplette zweite Lage rund 830 cm, die dritte 842 cm, die vierte 853 cm usw. Als Gesamtlänge aller 18 Lagen folgt $L \approx 16531$ cm ≈ 165 m.

Hinweis: Für die Berechnung der Schnurlänge wurde hier die Bahn der *Mittelpunkte* der Schnur-Querschnittsfläche benutzt. Man könnte stattdessen als Radien die Innenmaße benutzen, also $r_1 = i/2 = 2,75$ cm, $r_2 = r_1 + d = 2,79$ cm usw., oder die Außenmaße, also $r_1 = i/2 + d = 2,79$ cm, $r_2 = r_1 + d = 2,83$ cm usw. Das würde bedeuten, dass die Schnur mit ihrer ursprünglichen Länge am Kern anliegt und nach außen hin gedehnt wird bzw. dass die Schnur zum Wickeln prinzipiell nur zum Wickelkern hin gestaucht wird.

2. Das Helix-Modell

Eine Schwäche des Kreise-Modells ist, dass die Schnur in Wirklichkeit schräg gewickelt werden muss und daher eine Helix (Schraubenlinie) beschreibt, siehe rechts. Reichen die 0,2 mm „Luft“, um die Schnur überhaupt 47-mal wickeln zu können? Offenbar nicht ganz. Und passt dadurch nun *mehr* Schnur auf die Rolle oder *weniger*? Und wie groß ist der Unterschied? Dazu brauchen wir zunächst eine besondere Idee: Zur Berechnung der (Bogen-) Länge einer Helix stellt man sich den Wickelkern-Mantel abgerollt vor – so, als würde man den Kern einer Küchenpapierrolle aufschneiden:



Damit wird ein Zusammenhang zwischen der Helix im Raum und den rechtwinkligen Dreiecken in der Ebene sichtbar. Die Länge der Hypotenuse entspricht der gesuchten Schnurlänge für eine Windung. Die kürzere Kathete hat stets die Länge $d = 0,4$ mm, die längere hat die Länge eines Kreisrings in der k -ten Lage.

Wie groß ist der Unterschied gegenüber dem einfachen Kreise-Modell? Der größtmögliche relative Unterschied zwischen der längeren Seite und der Diagonalen in einem Rechteck ergibt sich hier in der ersten Lage: $x_{\text{Helix}}^2 \approx 2,77^2 \text{ cm}^2 + 0,04^2 \text{ cm}^2$, also $x_{\text{Helix}} \approx 2,7703$ cm. Die Abweichung beträgt pro Windung weniger als 0,02 mm, in der gesamten ersten Lage also etwa 0,1 cm. Der relative Fehler liegt damit bei 0,1 Promille.

Insgesamt ist die Differenz zwischen Helix-Modell und Kreise-Modell sehr klein – es bleibt also bei ungefähr 165 m Schnurlänge.

3. Das Volumen-Modell ...

Das Kreise-Modell und das Helix-Modell sind beide ziemlich rechenaufwändig. Der folgende, mathematisch sehr elegante Weg umgeht dies.

Die pfiffige Idee hierbei ist, dass eine Schnur mit einer Querschnittsfläche A und einer Länge L das Volumen $V = A \cdot L$ einnimmt. Mit Hilfe des der Schnur maximal zur Verfügung stehenden Volumens V_{max} ergibt sich eine obere Abschätzung für die Schnurlänge:

$$L_{\text{max}} = \frac{V_{\text{max}}}{A}.$$

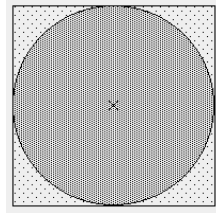
Der Schnur steht die Differenz des äußeren Zylinders und des inneren Kern-Zylinders zur Verfügung. Mit $V_{\text{max}} = V_{\text{außen}} - V_{\text{Kern}} = \pi \cdot (a/2)^2 \cdot b - \pi \cdot (i/2)^2 \cdot b = \pi \cdot b \cdot ((a/2)^2 - (i/2)^2) \approx 27,98 \text{ cm}^3$ und $A = \pi \cdot (d/2)^2 \approx 0,001257 \text{ cm}^2$ erhält man daraus $L_{\text{max}} \approx 22266 \text{ cm} \approx 223 \text{ m}$.

... und dessen Verfeinerung

Allerdings ist diese Abschätzung noch sehr grob – die Lücken zwischen den Schnüren werden nicht berücksichtigt, so, als könnte man die Schnüre zusammenpressen. Kein Wunder also, dass sich hier ein größerer Wert als beim Kreise-Modell ergibt.

Die Schnur benötigt aber nicht nur ihren kreisrunden Querschnitt, sondern einen quadratischen Querschnitt. Mit der *tatsächlich benötigten* Schnur-Querschnittsfläche $A^* = d^2 = 0,016 \text{ cm}^2$ bzw. dem Umrechnungsfaktor $\pi/4 \approx 0,785$ aus dem Verhältnis $A^*/A = \pi \cdot (d/2)^2/d^2$ erhält man dann als verbesserte obere Abschätzung:

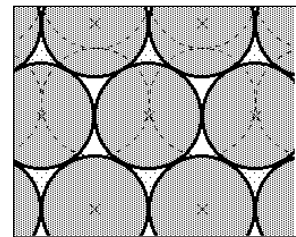
$$L^*_{\max} = \frac{V_{\max}}{A^*} \approx 17487 \text{ cm} \approx 175 \text{ m.}$$



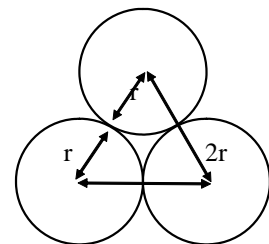
Warum liegt dieser Wert etwas oberhalb der 165 m vom Kreise-Modell? Nun, es müssten noch die „Freiräume“ an den Seiten und außerhalb der letzten Lage berücksichtigt werden. Alles in allem passen die Ergebnisse der verschiedenen Ansätze also gut zusammen.

4. Das Lücken-Modell ...

Vielleicht habt ihr auch so überlegt: Da passt doch noch mehr Schnur auf die Rolle – denn wieso muss man die Schnur denn „kästchenweise“ legen? Man kann doch auch auf Lücke legen, oder?! Damit hätten wir die Lücken verkleinert – siehe rechts.



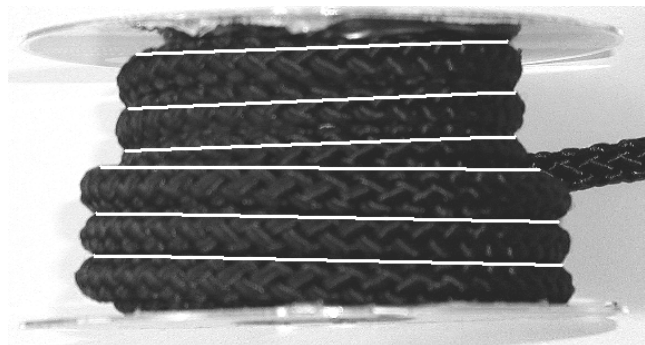
Die Mittelpunkte der Schnur würden dann ein gleichseitiges Dreieck bilden (siehe rechts). Die nächste Lage läge also nicht $2 \cdot r = 0,4 \text{ mm}$ höher, sondern nur $\sqrt{3} \cdot r \approx 1,732 \cdot r \approx 0,346 \text{ mm}$ höher – also $r_1 = 2,77 \text{ cm}$, $r_2 = 2,8046 \text{ usw.}$ Dies würde zwar bewirken, dass ggf. in jede zweite Lage für sich betrachtet weniger Schnur passt, aber statt rechnerisch 18,75 würden nun 21,5 Lagen auf die Rolle passen, also drei volle Lagen mehr. Rechnet man dieses Modell durch, so käme man auf eine Schnurlänge von rund 193 m, also etwa 33 Meter mehr als mit dem schlichten Kreise- oder Helix-Modell – und immerhin 18 m mehr als in der bisherigen „Abschätzung nach oben“. Das passt nicht zusammen!



... *schief gewickelt!*

Das Lücken-Modell ist auf den ersten Blick überzeugend – aber es ist **falsch!**

Wenn nämlich die erste Lage nach rechts gerollt wird, dann muss die zweite zwangsläufig nach links aufgerollt werden (siehe rechts). Da beide Bewegungen zueinander entgegengesetzt sind, ist es gar nicht möglich, auf Lücke zu rollen! Es geht nicht, beim besten Willen nicht!



Die optimale Aufrollstrategie ist und bleibt, die Schnur aufeinander zu legen, die 165 m sind und bleiben eine gute Näherung. Und wir wissen jetzt: Die Abschätzung von 175 m ist doch eine obere Grenze für die Schnurlänge.

Übrigens: Selbst geübte Modellbildner tappen leicht in diese Falle. Spätestens nach Erkennen der gleichseitigen Dreiecke sind sie davon überzeugt: „Das ist es!“ – Ist es aber nicht.