Lösungsbeispiel Klassenstufe 7/8 - Dresdens Rathausmann

1. Passen die Angaben zu Volumen, Oberfläche und Höhe der Figur zusammen?

2. Wie dick ist die Kupferhülle?

3. Wie dick ist die Vergoldung?

zu 1: Unter der Annahme, dass die Höhe der Figur mit 5,05 m ohne Halbkugel und mit 5,63 m mit Halbkugel korrekt angegeben ist, können z. B. folgende Überlegungen einen Anhaltspunkt dafür geben, ob die Angaben zu Oberfläche und Volumen glaubwürdig sind, also insbesondere zueinander passen. Die Proportionen des Rathausmannes entsprechen augenscheinlich denen eines normalen – wenngleich herkulisch gebauten – Menschen. Man kann also etwa einen 1,90 m großen Menschen wie folgt modellieren, wobei die gewählten Maße anhand des eigenen Körpers geschätzt werden können:

Kopf: Kugel von 30 cm Durchmesser
$A_O(\text{Kopf}) = 4\pi\, r^2 = 4\pi \cdot (15\text{ cm})^2$
$V(\text{Kopf}) = \frac{4}{3}\pi\, r^3 = 4\pi \cdot 5\text{ cm} \cdot (15\text{ cm})^2$

Arme: zwei Zylinder von je 80 cm Länge (h) und 12 cm Durchmesser ($d = 2r$)
$A_O(\text{Arme}) = 2 \cdot (\pi\, d\, h) = 2 \cdot (\pi \cdot 12\text{ cm} \cdot 80\text{ cm})$ (nur Mantelfläche berücksichtigt)
$V(\text{Arme}) = 2 \cdot (\pi\, r^2\, h) = 2 \cdot (\pi \cdot 6^2\text{ cm}^2 \cdot 80\text{ cm})$

Rumpf: Zylinder von 60 cm Länge (h) und 35 cm Durchmesser ($d = 2r$)
$A_O(\text{Rumpf}) = \pi\, d\, h = \pi \cdot 35\text{ cm} \cdot 60\text{ cm}$ (nur Mantelfläche berücksichtigt)
$V(\text{Rumpf}) = \pi\, r^2\, h = \pi \cdot 17{,}5^2\text{ cm}^2 \cdot 60\text{ cm}$

Beine: zwei Zylinder von je 100 cm Länge (h) und 17 cm Durchmesser ($d = 2r$)
$A_O(\text{Arme}) = 2 \cdot (\pi\, d\, h) = 2 \cdot (\pi \cdot 17\text{ cm} \cdot 100\text{ cm})$ (nur Mantelfläche berücksichtigt)
$V(\text{Arme}) = 2 \cdot (\pi\, r^2\, h) = 2 \cdot (\pi \cdot 8{,}5^2\text{ cm}^2 \cdot 100\text{ cm})$

Füllhorn : Zylinder von 100 cm Länge (h; etwa Beinlänge) und 20 cm Durchmesser ($d = 2r$)
$A_O(\text{Füllhorn}) = \pi\, d\, h = \pi \cdot 20\text{ cm} \cdot 100\text{ cm}$ (nur Mantelfläche berücksichtigt)
$V(\text{Füllhorn}) = \pi\, r^2\, h = \pi \cdot 10^2\text{ cm}^2 \cdot 100\text{ cm}$

Trauben: Zylinder von 45 cm Länge (h; knapp halbe Beinlänge) und 30 cm Durchmesser ($d = 2r$)
$A_O(\text{Trauben}) = \pi\, d\, h = \pi \cdot 30\text{ cm} \cdot 45\text{ cm}$ (nur Mantelfläche berücksichtigt)
$V(\text{Trauben}) = \pi\, r^2\, h = \pi \cdot 15^2\text{ cm}^2 \cdot 45\text{ cm}$

Halbkugel: Radius ist in natura 58 cm, im Modell also $58 \cdot (1{,}90 : 5{,}05)\text{ cm} \approx 21{,}82\text{ cm}$
$A_O(\text{Halbkugel}) = 0{,}5 \cdot 4\pi\, r^2 = 2\pi \cdot (21{,}82\text{ cm})^2$
$V(\text{Halbkugel}) = 0{,}5 \cdot \frac{4}{3}\pi\, r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot (21{,}82\text{ cm})^3$

Ausrechnen der einzelnen Oberflächeninhalte und Volumina mit dem Taschenrechner und anschließende Addition ergibt für das gesamte verkleinerte Modell:

A_{O}(kleines Modell) ≈ 39 654 cm^2
V(kleines Modell) ≈ 220 385 cm^3

Die Werte für das entsprechende Modell in Originalgröße ergeben sich wie folgt:

$A_{\mathrm{O}}(\text{großes Modell}) = \left(\frac{5{,}05}{1{,}90}\right)^2 \cdot A_{\mathrm{O}}(\text{kleines Modell}) \approx 28\ \mathrm{m}^2$

$V(\text{großes Modell}) = \left(\frac{5{,}05}{1{,}90}\right)^3 \cdot V(\text{kleines Modell}) \approx 4{,}1\ \mathrm{m}^3$

Beide Werte stimmen angesichts der groben und von einer genaueren Vermessung der Abbildung der Statue unabhängigen Modellierung ziemlich gut mit den für Oberfläche und Volumen angegebenen Werten überein. Diese sind also glaubwürdig und werden daher ab jetzt als richtig akzeptiert:
$A_{\mathrm{O}} = 27{,}2\ \mathrm{m}^2$; $V = 3{,}6\ \mathrm{m}^3$

zu 2: Um diese Frage näherungsweise zu beantworten, müsste man das Volumen des verarbeiteten Kupfers kennen. Dann könnte man dieses Volumen durch die angegebene Oberfläche dividieren und würde eine durchschnittliche Dicke der Hülle erhalten.
Aus Massenangabe 380 kg errechnet man mit der Dichte von Kupfer (8,96 g · cm^{-3}) ein Kupfervolumen von etwa 42 000 cm^3. Daraus ergibt sich eine durchschnittliche Dicke von (42 000 : 272 000) cm ≈ 0,16 cm. Die Kupferhülle ist also relativ dünn. (Sie wird wesentlich von dem Stützgerüst getragen.)

zu 3: Mit der Dichte 19,3 g · cm^{-3} für Gold errechnet man für 520 g Gold ein Volumen von etwa 27 cm^3. Daraus ergibt sich für die Dicke der Goldschicht:

$$\frac{27\ \mathrm{cm}^3}{272000\ \mathrm{cm}^2} \approx 0{,}000099\ \mathrm{cm} \approx 1\ \mu\mathrm{m}$$

Das kann stimmen; Blattgold kann sogar noch dünner sein.