Lösungsideen zur Aufgabe zum Riesen-Schokoladen-Ei

1. Schon das Verstehen der Aufgabe ist eine Herausforderung!

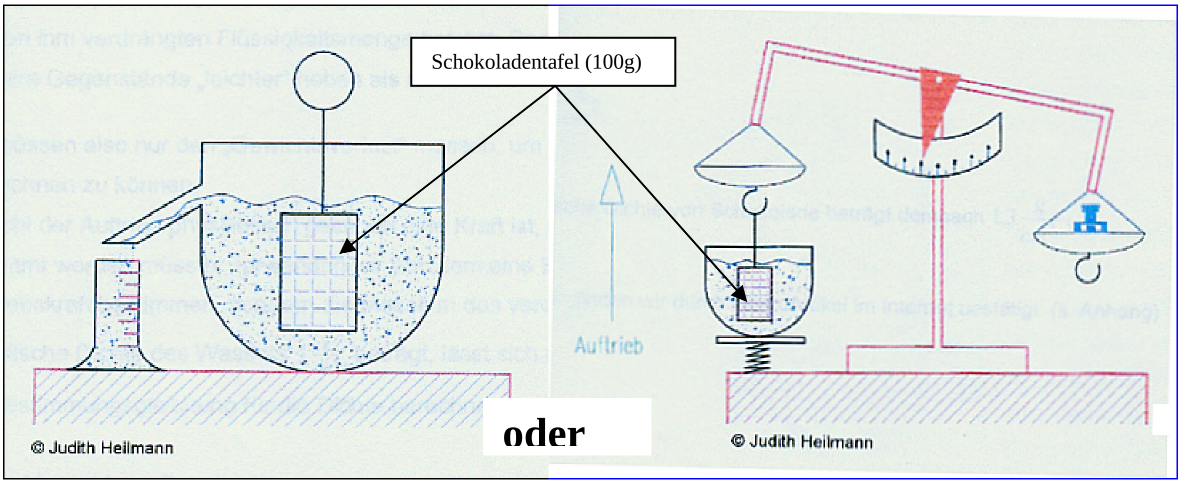
„Uns fiel bei der Aufgabe auf, dass es keine strikte Schulaufgabe ist, wie man sie im Mathebuch finden kann. Wir fingen bei Null an und mussten uns erst einmal überlegen, mit welchen Hilfsmitteln wir uns der Lösung nähern könnten. Dabei haben wir uns nicht nur auf die Mathematik beschränkt, sondern auch auf unser Wissen aus der Physik und Allgemeinwissen angewendet.“

So haben das alle unsere teilnehmenden Teams gesehen und daraus ihre Lösungsstrategien entwickelt:

- Zunächst nötige Informationen für das Lösen der Aufgabe herausfinden:
  „Nach dem ersten Lesen der Aufgabe ist uns aufgefallen, dass wir nicht nur das Volumen des Eis benötigen, sondern auch die Dichte der Schokolade.“
- Näherungsberechnungen zur Ei-Schale ausführen.
- Überlegungen zur Genauigkeit des Resultats gehören dazu!

2. Informationsbeschaffung Teil 1: Schokoladendichte

Schokoladenfirmen reagieren möglicherweise etwas genervt, wenn man bei ihnen direkt nach der Schokoladendichte nachfragt. Internet –Recherche führt aber auch zum Ziel.
Oder noch viel interessanter: Selbst experimentieren und rechnen!



Ob einfaches Wasserverdrängungsexperiment oder Ausnutzung des Archimedischen Prinzips: mit ein wenig Physik kommt man schnell ans Ziel.

V = Volumen der Schokoladentafel

Wir erhalten bei unserem Versuch für das Volumen V = 78 cm^3.

Damit berechnet sich die spezifische Dichte von „unserer“ Schokolade wie folgt:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\rho = \frac{100g}{79cm^3}$$

$$\rho = 1{,}27\frac{g}{cm^3}$$ (gerundet auf Hundertstel)

Die spezifische Dichte von „unserer“ Schokolade beträgt $1{,}27\frac{g}{cm^3}$.

3. Informationsbeschaffung Teil 2: Annäherung an das Ei-Volumen

Wäre das Schokoladen-Ei von der Größe eines Hühnereis, könnte Experimentieren bei unserem Volumenproblem schnell helfen: Mit einem Messbecher und Wasser wäre durch die Wasserdrängung des Ei sein Volumen rasch bestimmt. Aber so?? Beim Hochrechnen auf das Riesen-Ei wird's kompliziert, weil wir es ja mit einem räumlichen Problem zu tun haben.

Unsere Teams haben sich hier mit mathematisch gut handhabbaren „Hilfskörpern" zu helfen gewusst:

> *„Zwar ist es uns nicht möglich, das Volumen des Ei exakt zu bestimmen, jedoch gibt es die Möglichkeit, mit Hilfe anderer Körperformen das Volumen des Ei näherungsweise zu bestimmen. Kugel, Rotationsellipsoid oder eine Kombination von Halbkugel und Halbellipsoid kommen da besonders in Frage."*

Mit Hilfe des Satzes von Cavalieri, der allgemeinen Volumenformel für Rotationskörper oder mit Hilfe der Formelsammlung haben unsere Teams diese Hilfsvolumina bestimmt.

Zum Beispiel die Lösungsidee des „PISA-Teams" für einen Rotationsellipsoiden mit den Halbachsen a, b und c, deren Werte aus den Vorgaben der Aufgabe oder mit Hilfe des Riesen-Ei-Fotos festgelegt wurden :

Wir betrachten das Ei näherungsweise als einen Ellipsoiden.

Die entsprechende Volumenformel haben wir uns zuvor mit Hilfe des Satzes von Cavalieri überlegt zu: $V_{E_a} = \frac{4}{3}\pi \cdot a^2 c$.

Da in unserem Fall gilt: $a = b = \frac{s}{2} = 3{,}195m$ und $c = \frac{h}{2} = 4{,}16m$

folgt für das Volumen: $\underline{V_{E_a} = 177{,}8786m^3}$.

4. Berechnung der Wandstärke unseres Ei-Hohlkörpers:

Kein Problem, wenn man das Volumen der verwendeten Schokoladenmasse kennt.

Doch zunächst müssen wir die verwendete „Menge" an Schokolade bestimmen.

Mit $V_s = \frac{m}{\rho}$ und $\rho = 1{,}3\frac{g}{cm^3}$ folgt mit m = 1950 kg

$V_s = 1{,}5m^3$

(Wir verwenden für die Masse den Wert, den wir im Internet gefunden haben, nämlich m = 1950 kg. Mit diesem Wert für m und einer Dichte von 1,3 $\frac{g}{cm^3}$ muss das Schokoladenvolumen für die nachfolgenden Rechnungen nicht gerundet werden.)

Und nun die Wandstärke des Hohlkörpers? Kennt man erst einmal das Volumen des inneren Hohlraums, kommt man rasch auf die Spur der Wandstärke:

Berechnung der Wandstärke über den Ellipsoiden als Hohlkörper

$V_a = 177{,}8786 m^3$

Von dem Außenvolumen des Ellipsoiden subtrahieren wir das Volumen der verwendeten Schokolade und erhalten das Innenvolumen des Ellipsoiden.

$\Delta V = V_s = V_a - V_i$

$V_i = V_a - V_s$

$V_i = 176{,}3786 m^3$

Für das Innenvolumen kann man als Formel schreiben:

$V_i = \frac{4}{3}\pi \cdot a_i^2 c_i$; mit $a_i = \frac{s_i}{2}$ und $c_i = \frac{h_i}{2}$

folgt $V_i = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a_i^2 \cdot c_i$ und mit $s_i = s - 2d$; $h_i = h - 2d$

folgt $V_i = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot (s-2d)^2 (h-2d)$

Nachfolgende Termumformungen liefern dann eine Gleichung zur Berechnung von d.

$$\frac{6 \cdot V_i}{\pi} = (s^2 - 4ds + 4d^2)(h - 2d)$$

$$\frac{6 \cdot V_i}{\pi} = s^2 h - 2ds^2 - 4dsh + 8d^2 s + 4d^2 h - 8d^3$$

$$\frac{6 \cdot V_i}{\pi} - s^2 h = -2d(s^2 + 2sh) + 4d^2(2s + h) - 8d^3$$

$$-2{,}86476 = -294{,}3234d + 84{,}4d^2 - 8d^3$$

$$8d^3 - 84{,}4d^2 + 294{,}3234d = 2{,}86476$$

Die Lösung dieser Gleichung ist sicherlich machbar, aber wohl kompliziert.

Näherungsüberlegugnen und –annahmen lassen sich beim Lösen der Aufgabe nicht vermeiden. Unsere Teams haben ja schon wiederholt davon Gebnrauch gemacht.

Deshalb: Zur Vereinfachung der weiteren Berechnungen ist es sinnvoll, die Gleichung geringfügig abzuändern, wenn dadurch die Rechnung deutlich erleichtert wird.

Wir überlegen uns einen vereinfachten Lösungsansatz:

Da d sehr klein ist gegenüber den anderen Größen, können wir den Summanden $8d^3$ vernachlässigen.

Jetzt erhalten wir eine quadratische Gleichung, die wir mit der p-q-Formel lösen.

$$d^2 - 3{,}4872d + 0{,}033943 = 0$$

$$d_{1/2} = \frac{3{,}4872}{2} \pm \sqrt{(\frac{3{,}4872}{2})^2 - 0{,}033943}$$

$\underline{d_1 = 9{,}761 \cdot 10^{-3}[m]}$ und $d_2 = 3{,}477[m]$ (Wert entfällt; ergibt keinen Sinn!)

Wir erhalten als Wandstärke $\underline{d_1 = 9{,}76mm}$, also einen Wert, der sich von den bereits berechneten Werten nur unwesentlich unterscheidet.

5. Fehlerbetrachtungen gehören dazu!

Das Resultat der Berechnungen: **Das Riesen-Ei hat eine Wandstärke von ~ 1 cm!**

Aber ist das Ergebnis auch belastungsfähig?

> *„Vergleichsrechnungen für die Kugel-Idee und für die Kombination von Halbkugel und Halbellipsoid haben auf denselben Näherungswert für die Wandstärke geführt!“*

> *„Wir mußten noch davon ausgehen, dass unsere Näherungsberechnungen fehlerbehaftet sind, aber insgesamt gesehen sind diese Abweichungen wohl vernachlässigbar klein. Wir können uns nämlich nicht vorstellen, dass Schokolade auf einen Zehntelmillimeter genau verarbeitet werden kann.“*

> *„Veränderung der Masse? Wir sind von 1950 kg Schokolade ausgegangen – so, wie wir es im Internet gefunden haben. Vergrößerung um 50 kg führt für das Kugelmodell auf eine Wandstärke von 10,01 mm, also fast dieselbe Stärke vor vorher.“*

Also: Eine Diskussion entspinnt sich, die nicht nur interessant, sondern auch nötig ist!

6. Und ganz zum Schluss:

> *„Teamwork hat bei unserer Arbeit eine große Rolle gespielt. Insgesamt hat uns das großen Spaß gemacht.“*

Das meinte unser PISA-Team. Habt Ihr die gleichen Erfahrungen gemacht?