Brandenburg

Bigalke | Köhler

Mathematik

Gymnasiale Oberstufe

Qualifikationsphase
Leistungskurs

12

Teildruck
1. Kapitel: Vektoren und Koordinatensysteme

Cornelsen

Bigalke | Köhler

Mathematik

Redaktion: Dr. Ulf Rothkirch
Layout: Klein und Halm Grafikdesign, Berlin
Bildrecherche: Kai Mehnert

Grafik: Dr. Anton Bigalke, Waldmichelbach
Illustration: Detlev Schüler †, Berlin (66-1, 75-1, 75-2);
Cornelsen/Henning Knoff (26-1);
Dr. Norbert Köhler, Stahnsdorf (107-1, 107-2, 107-3);
Dr. Anton Bigalke, Waldmichelbach (alle weiteren)
Umschlaggestaltung: Klein und Halm Grafikdesign,
Hans Herschelmann, Berlin
Technische Umsetzung: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg

Bilder aus dem Land Brandenburg

Umschlag: Schloss Rheinsberg
Seite 15: Angermünde, Rathaus
Seite 65: Dahme/Mark
Seite 87: Beelitz-Heilstätten, Baumkronenpfad

www.cornelsen.de

Dieses Werk enthält Vorschläge und Anleitungen für Untersuchungen und Experimente.
Vor jedem Experiment sind mögliche Gefahrenquellen zu besprechen.
Beim Experimentieren sind die Richtlinien zur Sicherheit im Unterricht einzuhalten.

Die Webseiten Dritter, deren Internetadressen in diesem Lehrwerk angegeben sind, wurden vor Drucklegung sorgfältig geprüft. Der Verlag übernimmt keine Gewähr für die Aktualität und den Inhalt dieser Seiten oder solcher, die mit ihnen verlinkt sind.

1. Auflage, 1. Druck 2020

Alle Drucke dieser Auflage sind inhaltlich unverändert
und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

ISBN 978-3-06-040669-2 (Schülerbuch)
ISBN 978-3-06-040974-7 (E-Book)

Inhalt

- ☐ Wiederholung
- ■ Basis
- ◩ Basis/Erweiterung
- □ Vertiefung

I. Koordinatensysteme und Vektoren – Orientieren und Bewegen im Raum

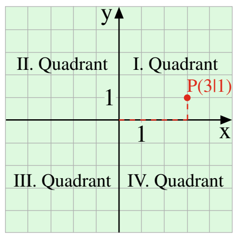
1. Punkte im Koordinatensystem

Punkte und geometrische Gebilde werden in ***kartesischen Koordinatensystemen*** dargestellt, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen.

A. Punkte in der Ebene

Punkte in der Ebene und ebene geometrische Gebilde werden im zweidimensionalen Koordinatensystem dargestellt. Die Darstellung ist verzerrungsfrei möglich.
Die beiden ***Koordinatenachsen*** (x-Achse, y-Achse) stehen im ***Koordinatenursprung*** senkrecht aufeinander. Sie unterteilen die Ebene in vier ***Quadranten****.
Ein Punkt P wird durch zwei Koordinaten festgelegt. Der Punkt P(a|b) liegt vom Ursprung aus gesehen a Einheiten in Richtung der x-Achse und b Einheiten in Richtung der y-Achse.

Zweidimensionales Koordinatensystem:

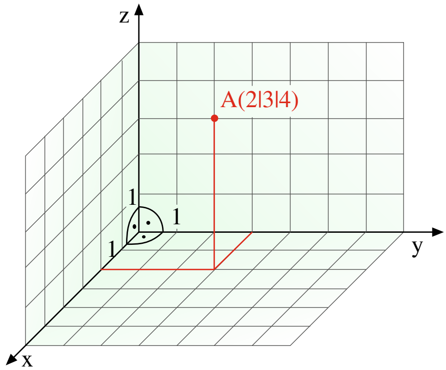


B. Punkte im Raum

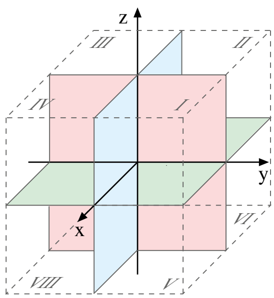
Punkte und geometrische Gebilde im Raum werden im dreidimensionalen Koordinatensystem als ***Schrägbild*** dargestellt.
Die drei ***Koordinatenachsen*** (x-Achse, y-Achse, z-Achse) stehen im ***Koordinatenursprung*** senkrecht aufeinander.
Im Schrägbild wird die x-Achse allerdings unter einem Winkel von 135° zu den beiden anderen Achsen gezeichnet, um einen Raumeindruck entstehen zu lassen. Die Einheit auf der x-Achse wird mit dem ***Faktor*** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ verkürzt, damit ein realer Eindruck entsteht.

Der Punkt P(a|b|c) liegt vom Ursprung aus gesehen a Einheiten in Richtung der x-Achse, b Einheiten in Richtung der y-Achse und c Einheiten in Richtung der z-Achse.
Drei Koordinatenebenen (x-y-Ebene, x-z-Ebene und y-z-Ebene) teilen den Raum in acht ***Oktanten****. Die Oktanten I bis IV liegen über den Quadranten I bis IV der x-y-Ebene, die Oktanten V bis VIII liegen darunter.

Dreidimensionales Koordinatensystem:



Koordinatenebenen und Oktanten:



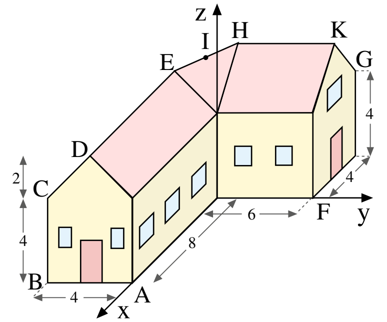
* Koordinatenachsen und Koordinatenebenen gehören nicht zu den Quadranten bzw. den Oktanten.

Beispiel: Punktkoordinaten

Rechts ist ein Haus im Schrägbild dargestellt. Die Maße (in m) sind eingezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecken A bis K des rechts dargestellten Hauses.

b) Welche Punkte liegen im zweiten bzw. im dritten bzw. im vierten Oktanten des Koordinatensystems?



Lösung zu a:

Wir lesen die Koordinaten der Punkte aus der Zeichnung ab. Beispielsweise kommt man vom Ursprung zum Punkt D, indem man 8 Einheiten in Richtung der x-Achse geht, dann −2 Einheiten in Richtung der y-Achse und schließlich 6 Einheiten in Richtung der z-Achse. Resultat: D (8|−2|6)

Am schwierigsten ist der Punkt I zu bestimmen, der in der Mitte zwischen E und H liegt.

Er hat die Koordinaten I (−1|−1|6).

Koordinaten der Eckpunkte:

A (8|0|0)	F (0|6|0)
B (8|−4|0)	G (−4|6|4)
C (8|−4|4)	H (−2|0|6)
D (8|−2|6)	I (−1|−1|6)
E (0|−2|6)	K (−2|6|6)

Lösung zu b:

Im zweiten Oktanten liegen alle Punkte mit $x < 0$, $y > 0$ und $z > 0$, also G und K. Im 3. Oktanten liegt nur I. Im 4. Oktanten liegen alle Punkte mit $x > 0$, $y < 0$ und $z > 0$, also C und D.

Die Punkte A, B, E, F und H liegen auf den Koordinatenachsen bzw. den Koordinatenebenen und gehören folglich keinem Oktanten an (vgl. Fußnote S. 14).

Lage der Punkte in den Oktanten:

Oktant II: $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$;
G und K

Oktant III: $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$
nur I

Oktant IV: $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$
C und D

In keinem Oktanten: $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$:
A, B, E, F und H

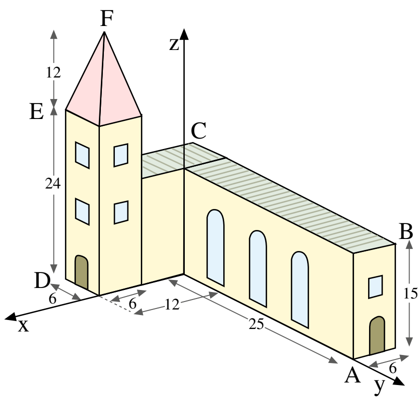
Übung 1 Koordinaten im Raum

Die Abbildung zeigt einen Gebäudekomplex.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte A bis F.

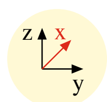
b) Liegen die Punkte U (−2|20|12), V (2|−4|18) und W (10|−3|28) innerhalb des Hauses?

c) Zeichnen Sie das Gebäude in einem Koordinatensystem, dessen y-Achse wie im Beispiel oben horizontal verläuft.



Übung 2 Geändertes Koordinatensystem

Zeichnen Sie das Gebäude aus dem obigen Beispiel in einem Koordinatensystem, in welchem die Richtung der x-Achse umgekehrt ist. Verwenden Sie für diese Darstellung die im Beispiel errechneten Koordinaten der Punkte A bis K.



Übungen

3. Punkte im Koordinatensystem

Geben Sie an, in welchem Oktanten der Punkt P liegt.

a) P(1|−1|3) b) P(2|1|2) c) P(−1|−1|4) d) P(1|−2|−3)
e) P(−2|−2|−3) f) P(−2|1|1) g) P(−2|1|−1) h) P(0|0|0)

4. Punkte auf den Achsen und Koordinatenebenen

Prüfen Sie, ob der Punkt P auf der x-z-Ebene bzw. auf einer Koordinatenachse liegt.

a) P(1|2|1) b) P(2|−1|0) c) P(0|0|−4) d) P(0|0|0)
e) P(4|0|−1) f) P(0|1|2) g) P(1|−3|0) h) P(4|0|0)

5. Lage von Punkten

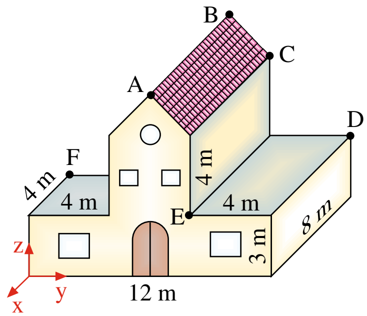
Geben Sie an, welche Bedingung ein Punkt P erfüllen muss, damit er die angegebene Lage besitzt. Beispiel: P(x|y|z) liegt in der x-y-Ebene, wenn z = 0 gilt.

a) P liegt auf der y-Achse.
b) P liegt auf der x-Achse.
c) P liegt auf der x-y-Ebene.
d) P liegt auf der y-z-Ebene.
e) P liegt auf der x-z-Ebene.
f) P liegt auf der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten der x-y-Ebene.

6. Schrägbild

Die Graphik zeigt das Schrägbild eines Gebäudes, das 9 m hoch ist.

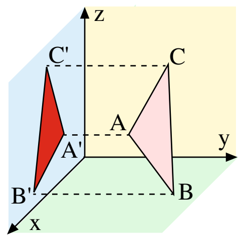
a) Bestimmen Sie die Koordinaten der eingezeichneten Punkte A bis F.
b) Prüfen Sie, welche der Punkte U(−6|3|2), V(−6|6|8) und W(−1|7|8) im Inneren des Gebäudes liegen.



7. Projektion eines Dreiecks

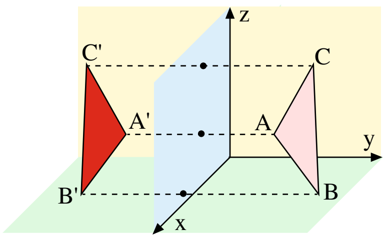
Das Dreieck ABC wird senkrecht auf die angegebene Koordinatenebene projiziert. Es entsteht das Dreieck A′B′C′. Geben Sie die Punkte A′, B′ und C′ an. Fertigen Sie eine Zeichnung an.

a) A(2|3|2), B(3|5|1), C(5|5|5)
x-z-Ebene
b) A(2|3|2), B(3|5|1), C(5|5|5)
y-z-Ebene



8. Spiegelung eines Dreiecks

Das Dreieck ABC wird an der x-z-Ebene gespiegelt. Bestimmen Sie die Spiegelpunkte A′, B′ und C′.
Fertigen Sie eine Zeichnung an.
A(2|3|2), B(3|5|1), C(5|5|5)



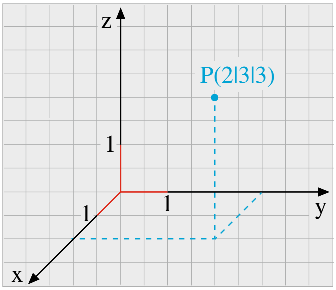
C. Schrägbilder

In Abschnitt B haben wir bereits Schrägbilder verwendet. Nun soll das Konstruieren von Schrägbildern vertieft werden.

Besonders einfach können Schrägbilder auf *kariertem Papier* gezeichnet werden.

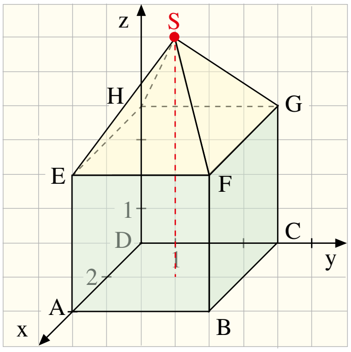
Verwendet man auf den unverzerrt dargestellten Achsen (y- und z-Achse) als Längeneinheit 1 cm, so stellt die Diagonale eines Rechenkästchens die mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ verkürzte Längeneinheit auf der x-Achse dar. Diese Tatsache gestattet das Zeichnen von Schrägbildern, ohne dass ein Linealmaßstab verwendet werden muss.

Diagonale als verkürzte Einheit:



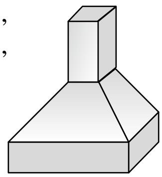
Beispiel: Würfel mit Pyramide
Stellen Sie einen Würfel mit einer aufgesetzten Pyramide im Schrägbild dar.
Kantenlänge des Würfels: 4 cm   Höhe der Pyramide: 3 cm

Lösung:
Wir stellen den Würfel achsenparallel im 1. Oktanten auf (Maßstab: 1 cm = 2 LE).
Die Eckpunktkoordinaten sind dann:
A (4|0|0), B (4|4|0), C (0|4|0), D (0|0|0)
E (4|0|4), F (4|4|4), G (0|4|4), H (0|0|4).
Die Spitze der Pyramide ist S (2|2|7).
Verdeckte Linien können gestrichelt eingezeichnet werden.
Die Außenseiten des Gebildes können zur Betonung farbig gestaltet werden.



Übung 9 Rechteck und Dreieck als Schrägbild
Zeichnen Sie das Schrägbild folgender Figuren:
a) Rechteck ABCD mit folgenden Ecken: A (4|1|0), B (2|1|0), C (2|0|3), D (4|0|3)
b) Dreieck UVW mit folgenden Ecken: U (3|3|1), V (1|4|1), W (0|3|3)

Übung 10 Abzugshaube
Eine vertikal aufgehängte Abzugshaube ist aus ebenen Blechteilen zusammengeschweißt. Ihre Ecken sind A (4|4|4), B (4|8|4), C (0|8|4), D (0|4|4), E (4|4|5), F (4|8|5), G (0|8|5), H (0|4|5), I (3|5|7), J (3|7|7), K (1|7|7), L (1|5|7), M (3|5|9), N (3|7|9), O (1|7|9), P (1|5|9).
Zeichnen Sie ein Schrägbild der Abzugshaube.

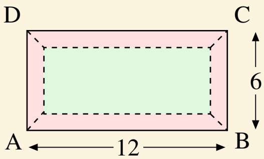


Schrägbilder

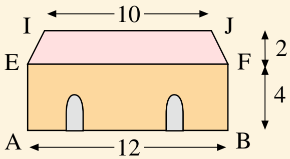
Schrägbilder dienen der ästhetischen Veranschaulichung raumgeometrischer Figuren. Auf Seite 17 kann man die Grundlagen nachlesen. Hier wird das vertieft, indem mit Grundriss, Aufriss und Seitenriss gearbeitet wird.

Beispiel: Schrägbild aus Rissen konstruieren

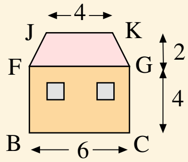
Für die Planung eines neuen Gebäudes wurden Risse mit den Maßen erstellt, und zwar ein Grundriss, ein Aufriss und ein Seitenriss. Zur Veranschaulichung für den Bauherrn soll aus den Rissen ein Schrägbild des Gebäudes konstruiert werden. Führen Sie die Konstruktion durch.



GRUNDRISS



AUFRISS



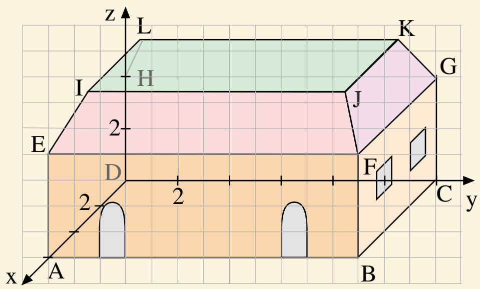
SEITENRISS

Lösung:
Wir stellen das Gebäude im 1. Oktanten des dreidimensionalen Koordinatensystems achsenparallel auf. Die Ecke D liegt im Ursprung.

Der Grundriss hat dann die Ecken A (6|0|0), B (6|12|0), C (0|12|0) und D (0|0|0).
Darüber liegen die Ecken E (6|0|4), F (6|12|4), G (0|12|4) und H (0|0|4) der Geschossdecke.
Schließlich hat die Dachoberseite die Eckpunkte I (5|1|6), J (5|11|6), K (1|11|6) und L (1|1|6).

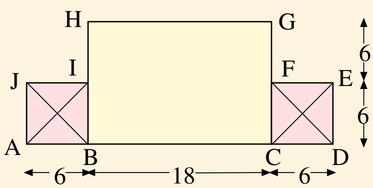
Rechts ist das Schrägbild mit Hilfe der Methode von Seite 17 dargestellt.

Schrägbild des Gebäudes:

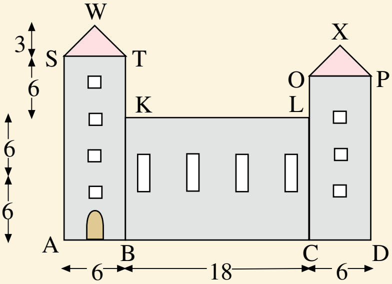


Übung 1 **Gebäude**

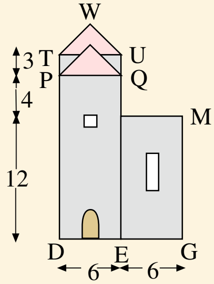
Gegeben sind die bemaßten Risse eines Klosters. Zeichnen Sie ein Schrägbild des Gebäudes. Verwenden Sie dazu die Raumkoordinaten der Punkte A bis X.



GRUNDRISS



AUFRISS



SEITENRISS

Übung 2 Pyramiden

Drei Pyramiden mit quadratischen Grundrissen und der Spitze S haben folgende Eckpunkte:

Pyramide 1:	A (7 | 6 | 0),	B (10 | 9 | 0),	C (7 | 12 | 0),	D (4 | 9 | 0),	S_1 (7 | 9 | 6)
Pyramide 2:	E (−2 | 10 | 0),	F (2 | 8 | 0),	G (4 | 12 | 0),	H (0 | 14 | 0),	S_2 (1 | 11 | 6)
Pyramide 3:	I (0 | 2 | 0),	J (4 | 2 | 0),	K (4 | 6 | 0),	L (0 | 6 | 0),	S_3 (2 | 4 | 5)

Fertigen Sie ein Schrägbild der Pyramiden 1 bis 3 an.
Verdeckte Teile sollen dabei nicht dargestellt werden.
Sichtbare Teile der Pyramiden sollen farbig oder schraffiert dargestellt werden.

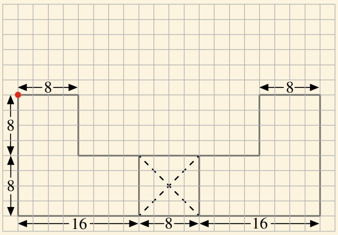
Übung 3 Schloss

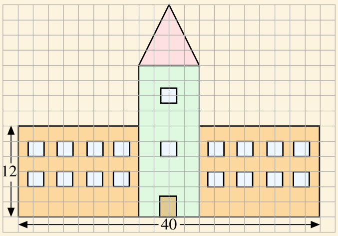
Ein Schloss hat die abgebildeten Risse (Grund-, Auf- und Seitenriss).

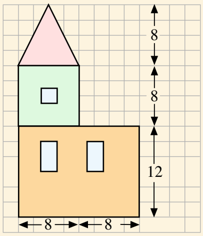
a) Konstruieren Sie ein Schrägbild des Schlosses im 1. Oktanten des Koordinatensystems. Der Ursprung soll in der Ecke des Grundrisses sein, die links hinten liegt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der neun Eckpunkte des Schlossturmes.

c) Prüfen Sie, ob die folgenden Punkte innerhalb des Gebäudes liegen.
R_1 (12 | 4 | 2), R_2 (6 | 10 | 2), R_3 (10 | 12 | 10), R_4 (12 | 18 | 20), R_5 (15 | 16 | 20), R_6 (10 | 20 | 26), R_7 (10 | 18 | 26)



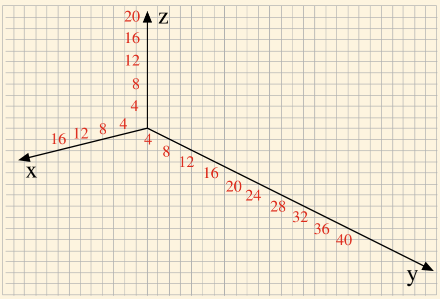




Übung 4 Koordinatensystem

Übertragen Sie das abgebildete Koordinatensystem auf ein kariertes Blatt.
Beachten Sie dabei die Neigungen von x-Achse und y-Achse.

Konstruieren Sie anschließend das Schrägbild des Schlosses aus Übung 13 in dem neuen Koordinatensystem.



Übung 5 Würfel und Dreieck

Ein achsenparalleler Würfel hat die Standfläche ABCD und die Deckfläche EFGH. Ein Raumdreieck hat die Ecken U, V und W.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild.

b) Wie lauten die fehlenden Punkte?

c) Zeichnen Sie die drei Risse.

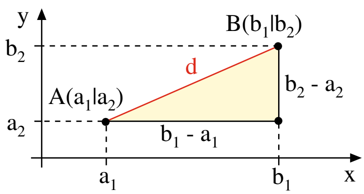
Würfel:
A (1 | 1 | 0), D (1 | 5 | 0), G (5 | 5 | 4)

Dreieck:
U (2 | 4 | 1), V (5 | 10 | 3), W (1 | 7 | 4)

D. Der Abstand von Punkten in der Ebene und im Raum

Um Berechnungen in ebenen und räumlichen Figuren vornehmen zu können, benötigt man Formeln zur Berechnung von Punktabständen und Streckenlängen. Dazu verwendet man die Koordinaten der Punkte und den Satz des Pythagoras.

Der Abstand* $d(A, B) = |AB|$ der Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$ wird mit Hilfe des Satzes von Pythagoras errechnet, der auf das abgebildete rechtwinklige Dreieck im Koordinatensystem angewandt wird. Das Resultat ist die folgende Abstandsformel:



Abstand zweier Punkte in der Ebene

Die Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$ besitzen den Abstand

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

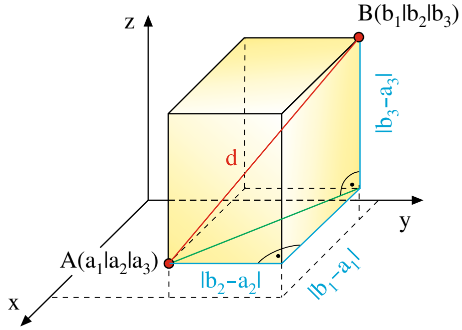
Beispiel: Punktabstand in der Ebene

Abstand von $A(3|2)$ und $B(7|5)$

$$|AB| = \sqrt{(7-3)^2 + (5-2)^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Der Abstand* $|AB|$ der Raumpunkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ wird durch zweifache Anwendung des Satzes von Pythagoras gewonnen.

Dazu wird die rechts abgebildete Figur im dreidimensionalen Koordinatensystem verwendet. Das Resultat ist die folgende Abstandsformel:



Abstand zweier Punkte im Raum

Die Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ besitzen den Abstand

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Beispiel: Punktabstand im Raum

Abstand von $A(4|2|1)$ und $B(2|6|5)$

$$|AB| = \sqrt{(2-4)^2 + (6-2)^2 + (5-1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

Übung 11 Punktabstand

Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B.

a) $A(4|2)$, $B(10|10)$
b) $A(1|-1|2)$, $B(4|5|8)$
c) $A(-5|3|0)$, $B(-1|7|7)$

Übung 12 Parameter

Für welche Werte des Parameters a besitzen die Punkte A und B den Abstand d?

a) $A(4|2)$, $B(9|a)$, $d = 13$
b) $A(1|2|3)$, $B(2|a|11)$, $d = 9$
c) $A(1|-1|4)$, $B(3|2|a)$, $d = 7$

* Für den Abstand zweier Punkte A und B verwendet man die Schreibweisen $d(A, B)$ oder $|AB|$.

Mit der Abstandsformel für Punkte im Raum lassen sich einfache Berechnungen in räumlichen Figuren durchführen.

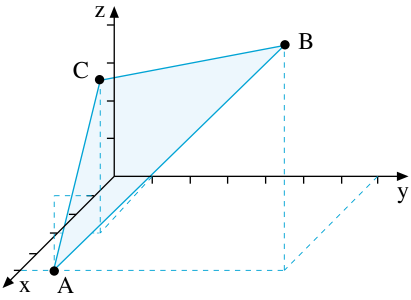
Beispiel: Gleichschenkligkeitstest und Rechtwinkligkeitstest beim Dreieck

Gegeben ist das Raumdreieck ABC mit den Ecken $A(1|-1|-2)$, $B(5|7|6)$ und $C(3|1|4)$.

a) Untersuchen Sie das Dreieck auf Gleichschenkligkeit.

b) Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks.

c) Prüfen Sie, ob das Dreieck rechtwinklig ist.



Lösung zu a:
Wir berechnen die Seitenlängen des Dreiecks durch Anwendung der Abstandsformel für Punkte im Raum.
Die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ stellen sich bei dieser Rechnung als gleich lang heraus.
Also ist das Dreieck gleichschenklig.

Gleichschenkligkeit des Dreiecks:

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (7-(-1))^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + 8^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$|AC| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-(-1))^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{44} \approx 6{,}63$$

$$|BC| = \sqrt{(3-5)^2 + (1-7)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{44} \approx 6{,}63$$

Lösung zu b:
Der Umfang ist gleich der Summe der Seitenlängen des Dreiecks, die wir unter a) bereits berechnet haben.
Er beträgt ca. 25,26.

Umfang des Dreiecks:

$$U = |AB| + |AC| + |BC| \approx 12 + 6{,}63 + 6{,}63 = 25{,}26$$

Lösung zu c:
Ein Dreieck ist rechtwinklig, wenn das Quadrat seiner längsten Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden kürzeren Seiten ist (Umkehrung des Satzes von Pythagoras). Da dieser Sachverhalt hier nicht zutrifft, ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

Test auf Rechtwinkligkeit:

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$
$$\sqrt{144}^2 = \sqrt{44}^2 + \sqrt{44}^2$$
$$144 = 44 + 44$$

$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ nicht rechtwinklig

Übung 13 Gleichschenklige Dreiecke

Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

a) $A(4|4|4)$, $B(10|10|7)$, $C(7|4|1)$
b) $A(6|2|8)$, $B(3|6|3)$, $C(2|6|8)$
c) $A(0|2|4)$, $B(3|8|2)$, $C(2|5|10)$
d) $A(2|2|2)$, $B(4|4|6)$, $C(6|0|4)$
e) $A(0|1|a)$, $B(4|1|0)$, $C(0|7|0)$

Übung 14 Rechtwinklige Dreiecke

Ist das Dreieck ABC rechtwinklig?

a) $A(1|1|2)$, $B(3|1|0)$, $C(2|2|3)$
b) $A(6|2|8)$, $B(2|6|8)$, $C(3|6|3)$

Übung 15 Raute oder Quadrat

Ist das Viereck ABCD eine Raute oder ein Quadrat? $A(2|4|2)$, $B(4|5|0)$, $C(5|7|2)$, $D(3|6|4)$

Wir führen nun Berechnungen in Schrägbildern durch. Auch dazu verwenden wir die Formel zur Berechnung von Punktabständen bzw. Streckenlängen sowie den Satz des Pythagoras.

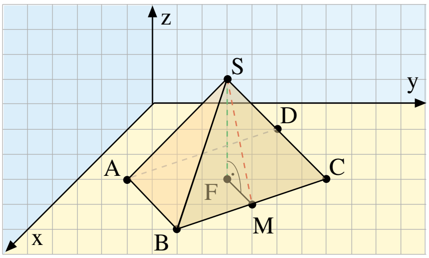
Beispiel: Schrägbild einer Pyramide

Betrachtet wird eine Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S.
Gegeben sind die Punkte A (6|2|0), B (10|6|0), C (6|10|0), D (2|6|0) und S (6|6|4). Dabei entspricht eine Längeneinheit 10 Metern.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide. Wo liegt der Höhenfußpunkt F ?
b) Eine Treppe führt von der Seitenmitte M der Grundkante $\overline{BC}$ zur Spitze S der Pyramide. Wie lang ist die Treppe?
c) Die Seitenfläche BCS der Pyramide soll restauriert werden. Wie groß ist der Inhalt von BCS?

Lösung zu a:
Wir zeichnen zunächst das Schrägbild.
Der Höhenfußpunkt F liegt senkrecht unter der Spitze S (6|6|4) in der x-y-Ebene. Er hat also die Koordinaten F (6|6|0).

Schrägbild der Pyramide:



Lösung zu b:
Die Koordinaten der Mitte der Seite BC erhalten wir durch Bilden des arithmetischen Mittels der Koordinaten von B und C.
Resultat: M (8|8|0)
Nun berechnen wir die Länge l der Treppe.
l ist der Abstand der Punkte M und S:
$l = |\overrightarrow{MS}| = \sqrt{24} \approx 4{,}9$.
Das entspricht in der Realität ca. 49 m.

Länge der Treppe:

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix}10\\6\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\10\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ M (8|8|0)

$$L = |\overrightarrow{MS}| = \sqrt{(6-8)^2 + (6-8)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{24} \approx 4{,}9$$

Lösung zu c:
Wir verwenden die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} g \cdot h$.
Die Grundlinie g hat die Länge $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{32}$.
Die Höhe h entspricht der Treppenlänge aus Teil b), also $l \approx 4{,}9$.
Der Inhalt von BCS ist also $A \approx 13{,}86$.
Das entspricht beim vorliegenden Maßstab von 1 : 10 in der Realität ca. 1368 m².

Inhalt der Seitenfläche BCS:

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(6-10)^2 + (10-6)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{32}$$

$$A = \tfrac{1}{2} g \cdot h = \tfrac{1}{2} |\overrightarrow{BC}| \cdot h \approx \tfrac{1}{2}\sqrt{32} \cdot 4{,}9 \approx 13{,}86$$

Übung 16 Ergänzung zum Beispiel

a) Berechnen Sie die Länge der Seitenkante $\overline{BS}$ der Pyramide aus dem obigen Beispiel.
b) Bestimmen Sie das Volumen V der Pyramide. Hinweis: Verwenden Sie die Information, dass die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat ist.
c) Welchen Abstand hat die Spitze der Pyramide vom Ursprung?

Übungen

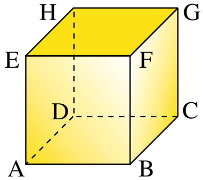
17. Dreieck im Raum

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Eckpunkten A (1|3|2), B (3|2|4) und C (– 1|1|3).

a) Zeichnen Sie ein räumliches kartesisches Koordinatensystem. Tragen Sie die Punkte A, B und C ein und zeichnen Sie das Schrägbild des Dreiecks ABC.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

18. Würfel



Ein Würfel besitzt als Grundfläche das Quadrat ABCD und als Deckfläche das Quadrat EFGH.

Dabei gelte: A (3|2|1), B (3|6|1), G (– 1|6|5).

a) Zeichnen Sie in ein räumliches Koordinatensystem ein Schrägbild des Würfels.

b) Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten von C, D, E, F und H.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M_1 der Seitenfläche BCGF und die Koordinaten des Würfelmittelpunktes M.

d) Berechnen Sie die Länge der Flächendiagonalen $\overline{BG}$ sowie die Länge der Raumdiagonalen $\overline{AG}$ des Würfels.

19. Pyramide

Gegeben sind die Punkte A (5|6|1), B (2|6|1), C (0|2|1), D (3|2|1) und S (2|4|5). Das Viereck ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S.

a) Zeichnen Sie die Pyramide in einem räumlichen Koordinatensystem.

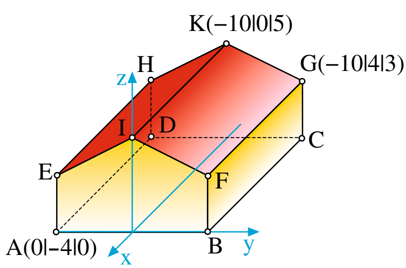
b) Bestimmen Sie die Länge der Seitenkante $\overline{AS}$.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Höhenfußpunktes F der Pyramide und berechnen Sie Höhe und Volumen der Pyramide.

20. Quader

Ein Quader ABCDEFGH hat die Eckpunkte A (2|3|5) und G (x|7|13).
Wie muss x gewählt werden, wenn die Diagonale $\overline{AG}$ die Länge 12 besitzen soll?

21. Haus



Gegeben ist das abgebildete Schrägbild eines Hauses.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B, C, D, E, F, H und I.

b) Das Dach soll gedeckt werden. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

c) Das Haus soll verputzt werden. Berechnen sie die Größe der zu verputzenden Außenfläche des Hauses.

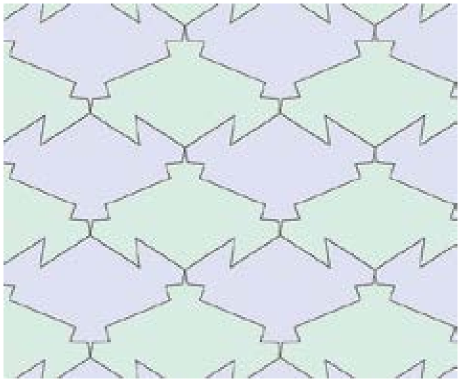
d) Bestimmen Sie das Luftvolumen des Hauses.

e) Zwischen welchen der eingetragenen Eckpunkte des Hauses liegt die längste Strecke? Wie lang ist diese Strecke?

2. Begriff des Vektors

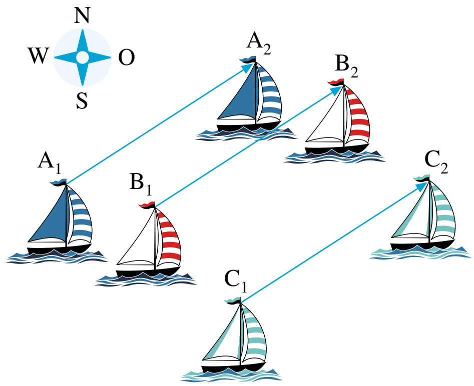
A. Vektoren als Pfeilklassen

Bei Ornamenten und Parkettierungen entsteht die Regelmäßigkeit oft durch ***Parallelverschiebungen*** einer Figur, wie auch bei dem abgebildeten Froschparkett.



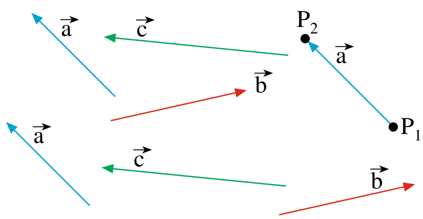
Eine Parallelverschiebung kann man durch einen Verschiebungspfeil oder durch einen beliebigen Punkt A_1 und dessen Bildpunkt A_2 kennzeichnen.

Bei einer Seglerflotte, die innerhalb eines gewissen Zeitraumes unter dem Einfluss des Windes abtreibt, werden alle Schiffe in gleicher Weise verschoben.
Die Verschiebung wird schon durch jeden einzelnen der gleich gerichteten und gleich langen Pfeile $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$ eindeutig festgelegt.



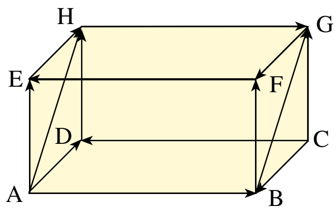
Wir fassen daher alle Pfeile der Ebene (des Raumes), die gleiche Länge und gleiche Richtung haben, zu einer Klasse zusammen. Eine solche Pfeilklasse bezeichnen wir als einen ***Vektor*** in der Ebene (im Raum).

Vektoren stellen wir symbolisch durch Kleinbuchstaben dar, die mit einem Pfeil versehen sind: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, … .
Jeder Vektor ist schon durch einen einzigen seiner Pfeile festgelegt.
Daher bezeichnen wir beispielsweise den Vektor $\vec{a}$ aus nebenstehendem Bild auch als Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$. Eine vektorielle Größe ist also durch eine Richtung und eine Länge gekennzeichnet, im Gegensatz zu einer reellen Zahl, einer sog. skalaren Größe.



Übung 1 Pfeile im Quader
Welche der auf dem Quader eingezeichneten Pfeile gehören zum Vektor $\vec{a}$?

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ b) $\vec{a} = \overrightarrow{EH}$ c) $\vec{a} = \overrightarrow{DH}$
d) $\vec{a} = \overrightarrow{CD}$ e) $\vec{a} = \overrightarrow{HG}$ f) $\vec{a} = \overrightarrow{AH}$

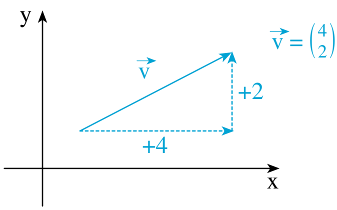


B. Spaltenvektoren/Koordinaten eines Vektors

Im Koordinatensystem können Vektoren besonders einfach dargestellt werden, indem man ihre Verschiebungsanteile in Richtung der Koordinatenachsen erfasst. Man verwendet dazu sogenannte ***Spaltenvektoren***.

Rechts ist ein Vektor $\vec{v}$ dargestellt, der eine Verschiebung um +4 in Richtung der positiven x-Achse und eine Verschiebung um +2 in Richtung der positiven y-Achse bewirkt.

Man schreibt $\vec{v} = \binom{4}{2}$ und bezeichnet $\vec{v}$ als einen ***Spaltenvektor*** mit den Koordinaten 4 und 2.



Spaltenvektoren in der Ebene

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren im Raum

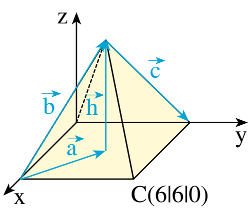
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2 bzw. v_1, v_2 und v_3 heißen Koordinaten von $\vec{v}$. Sie stellen die Verschiebungsanteile des Vektors $\vec{v}$ in Richtung der Koordinatenachsen dar.

Übung 2 Spaltenvektoren
Der in der Übung 1 dargestellte Quader habe die Maße $6 \times 4 \times 3$. Der Koordinatenursprung liege im Punkt D. Die Koordinatenachsen seien parallel zu den Quaderkanten.
Stellen Sie die folgenden Vektoren als Spaltenvektoren dar.

a) $\overrightarrow{CB}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AE}$
d) $\overrightarrow{AH}$ e) $\overrightarrow{BH}$ f) $\overrightarrow{BG}$
g) $\overrightarrow{DG}$ h) $\overrightarrow{DC}$ i) $\overrightarrow{AC}$

Übung 3 Pyramide
Dargestellt ist eine regelmäßige Pyramide mit der Höhe 6. Stellen Sie die eingezeichneten Vektoren in Spaltenform dar.



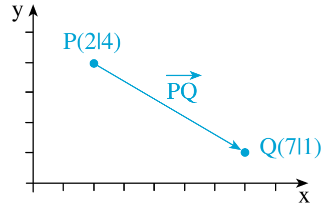
C. Der Verschiebungsvektor $\overrightarrow{PQ}$

Sind von einem Vektor $\vec{v}$ Anfangspunkt P und Endpunkt Q eines seiner Pfeile bekannt, so lässt sich $\vec{v}$ besonders leicht als Spaltenvektor darstellen.

Man errechnet dann einfach die ***Koordinatendifferenzen*** von Endpunkt und Anfangspunkt, um die Koordinaten des Spaltenvektors zu bestimmen. Im Beispiel rechts gilt also:

$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \binom{7-2}{1-4} = \binom{5}{-3}$

Analog kann man im Raum vorgehen, um den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ zu bestimmen, wenn P und Q bekannt sind.



$\overrightarrow{PQ} = \binom{7-2}{1-4} = \binom{5}{-3}$

Der Verschiebungsvektor $\overrightarrow{PQ}$

Ebene: $P(p_1|p_2)$, $Q(q_1|q_2)$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$

Raum: $P(p_1|p_2|p_3)$, $Q(q_1|q_2|q_3)$

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$

Übung 4 Verschiebungsvektor

Bestimmen Sie die Koordinaten von $\overrightarrow{PQ}$.

a) $P(2|1)$, $Q(6|4)$
b) $P(2|-3)$, $Q(-2|1)$
c) $P(1|2|-3)$, $Q(5|6|1)$
d) $P(-4|-3|5)$, $Q(2|3|-1)$
e) $P(3|4|7)$, $Q(2|6|2)$
f) $P(1|4|a)$, $Q(a|-3|2a+1)$

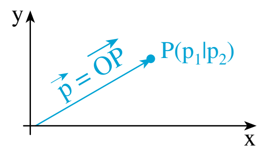
Übung 5 Pyramide

Eine dreiseitige Pyramide hat die Grundfläche ABC mit $A(1|-1|-2)$, $B(5|3|-2)$, $C(-1|6|-2)$ und die Spitze $S(2|3|4)$.

a) Zeichnen Sie die Pyramide.
b) Bestimmen Sie die Seitenkantenvektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AS}$.
c) M sei der Mittelpunkt der Kante $\overline{AB}$. Wie lautet der Vektor $\overrightarrow{AM}$?

D. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ eines Punktes

Auch die Lage von Punkten im Koordinatensystem lässt sich vektoriell erfassen. Dazu verwendet man den Pfeil $\overrightarrow{OP}$, der vom Ursprung O des Koordinatensystems auf den gewünschten Punkt P zeigt. Dieser Vektor heißt ***Ortsvektor*** von P. Seine Koordinaten entsprechen exakt den Koordinaten des Punktes P. Man geht in der Ebene und im Raum analog vor.



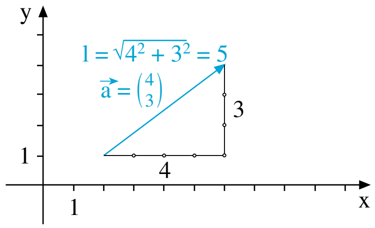
$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \binom{p_1}{p_2}$ bzw. $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

E. Der Betrag eines Vektors

Jeder Pfeil in einem ebenen Koordinatensystem hat eine Länge, die sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras errechnen lässt.

Alle Pfeile eines Vektors $\vec{a}$ haben die gleiche Länge. Man bezeichnet diese Länge als ***Betrag des Vektors*** und verwendet die Schreibweise $|\vec{a}|$.

Länge eines Pfeils in der Ebene:



Betrag eines Vektors in der Ebene:

$$\left|\binom{4}{3}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Betrag eines Vektors im Raum:

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$$

Definition I.1: Der Betrag eines Vektors

Der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors ist die Länge eines seiner Pfeile.

Betrag eines Spaltenvektors in der Ebene:

$$\vec{a} = \binom{a_1}{a_2} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Betrag eines Spaltenvektors im Raum:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Ein Vektor $\vec{a}$ heißt Einheitsvektor, wenn $|\vec{a}| = 1$ ist.

Beispiel: Betrag eines Vektors

Bestimmen Sie $|\vec{a}|$.

a) $\vec{a} = \binom{2}{4}$ b) $\vec{a} = \binom{a}{-3}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$

Lösung:

a) $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}48$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{a^2 + (-3)^2} = \sqrt{a^2 + 9}$

c) $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$

d) $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Übung 6 Betrag eines Vektors

Bestimmen Sie den Betrag des gegebenen Vektors.

a) $\binom{1}{a}$ b) $\binom{5}{12}$ c) $\binom{-3}{-5}$ d) $\begin{pmatrix}5\\-2\\12\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}4\\6\\12\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}3a\\0\\4a\end{pmatrix}$

Übung 7 Parameteraufgabe

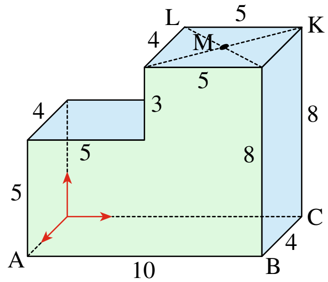
Stellen Sie fest, für welche $t \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen gelten.

a) $\vec{a} = \binom{t}{2t}$, $|\vec{a}| = 1$ b) $\vec{a} = \binom{2}{t}$, $|\vec{a}| = t + 1$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2t\\t\\2t\end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = 5$

F. Geometrische Anwendungen

Mit Hilfe von Vektoren kann man geometrische Objekte erfassen, z. B. Seitenkanten und Diagonalen von Körpern. Man kann geometrische Operationen durchführen, beispielsweise Spiegelungen. Wir behandeln hierzu exemplarisch zwei Aufgaben.

Beispiel: Diagonalen in einem Körper
Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ und $\overrightarrow{CM}$ als Spaltenvektoren dar.
Bestimmen Sie außerdem die Länge der Diagonalen $\overline{CM}$.



Lösung:
Wir verwenden ein Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu den Kanten des Körpers verlaufen.
Dann können wir die achsenparallelen Verschiebungsanteile der gesuchten Vektoren aus der Figur direkt ablesen. Damit erhalten wir die rechts aufgeführten Resultate.

$$\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BL} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

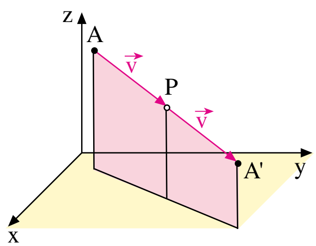
$$|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{2^2 + (-2{,}5)^2 + 8^2} \approx 8{,}62$$

Beispiel: Spiegelung eines Punktes
Der Punkt A (2|2|4) wird am Punkt P (4|6|3) gespiegelt. Auf diese Weise entsteht der Spiegelpunkt A′. Bestimmen Sie die Koordinaten von A′.

Lösung:
Wir bestimmen den Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$, der den Punkt A in den Punkt P verschiebt.

Er lautet $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 6-2 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Diesen Vektor können wir verwenden, um den Punkt P nach A′ zu verschieben.
Daher gilt für den Punkt A′:
A′(4 + 2|6 + 4|3 − 1) = A′(6|10|2).



Übung 8 Quader
Ein achsenparalleler Quader ABCDEFGH ist durch die Angabe der drei Punkte B (2|4|0), C (−2|4|0), H (−2|0|3) gegeben. Bestimmen Sie die restlichen Punkte, zeichnen Sie ein Schrägbild des Quaders und berechnen Sie die Länge der Raumdiagonalen $\overline{BH}$ des Quaders.

Übung 9 Raumdreieck
Gegeben ist das Raumdreieck ABC mit A (4|−2|2), B (0|2|2) und C (2|−1|4). Stellen Sie die Seiten des Dreiecks als Spaltenvektoren dar. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks. Spiegeln Sie das Dreieck ABC am Punkt P (4|4|3). Fertigen Sie ein Schrägbild des Dreiecks ABC und des Bilddreiecks A′B′C′ an.

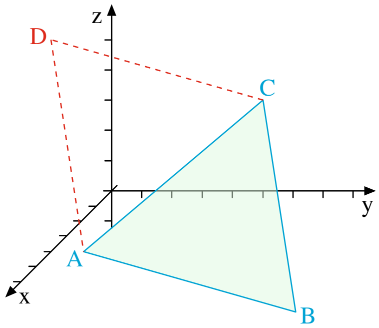
Mit Hilfe von Vektoren kann man Nachweise führen, die sonst schwierig wären, vor allem bei geometrischen Figuren im dreidimensionalen Raum.

Beispiel: Dreieck/Parallelogramm

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Eckpunkten A (6|2|1), B (4|8|−2) und C (0|5|3) (siehe Abb.).

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck gleichschenklig ist, aber nicht gleichseitig.

b) Der Punkt D ergänzt das Dreieck zu einem Parallelogramm. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.



Lösung zu a:

Wir bestimmen die Beträge der drei Seitenvektoren und vergleichen diese.

Das Dreieck ist gleichschenklig, da die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ gleich lang sind.

Es ist nicht gleichseitig, da $\overrightarrow{BC}$ länger ist.

Ein direktes Abmessen im Schrägbild ist wegen der Verzerrung nicht sinnvoll und führt zu falschen Ergebnissen.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 8-2 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 7$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 5-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = 7$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 5-8 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| \approx 7{,}1$$

Lösung zu b:

Die Koordinaten des Punktes D erhalten wir durch eine Parallelverschiebung des Punktes A mit dem Vektor $\overrightarrow{BC}$.

Resultat: D (2|−1|6)

$$A\,(6|2|1) \xrightarrow[\text{Verschiebung}]{\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}} D\,(2|-1|6)$$

Übung 10 Vierecke

Ein Viereck ABCD ist genau dann ein Parallelogramm, wenn die Vektorgleichungen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gelten. Begründen Sie diese Aussage anschaulich anhand einer Skizze. Prüfen Sie, ob die folgenden Vierecke Parallelogramme sind. Fertigen Sie jeweils eine Zeichnung an und rechnen Sie anschließend.

a)	b)	c)	d)
A (−2|1)	A (2|1)	A (0|0|3)	A (10|10|5)
B (4|−1)	B (5|2)	B (7|6|5)	B (6|17|7)
C (7|2)	C (5|5)	C (11|7|5)	C (1|10|9)
D (1|4)	D (2|4)	D (4|4|3)	D (5|3|7)

Übung 11 Parallelogramm

Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm. Es gilt A (0|3|1), B (6|5|7) und C (4|1|3). Bestimmen Sie die Koordinaten von D. Handelt es sich um eine Raute?

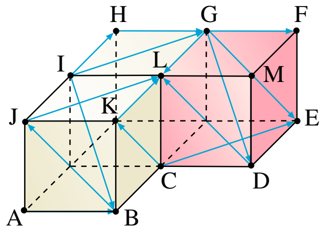
Übungen

12. Würfelgruppe

Der abgebildete Körper setzt sich aus drei gleich großen Würfeln zusammen.

a) Welche der eingezeichneten Pfeile gehören zum gleichen Vektor?

b) Begründen Sie, weshalb die Pfeile $\overrightarrow{JH}$, $\overrightarrow{KL}$ und $\overrightarrow{GL}$ nicht zu dem gleichen Vektor gehören, obwohl sie parallel zueinander sind.



13. Pfeile eines Vektors

Die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ sollen zum gleichen Vektor gehören. Bestimmen Sie die Koordinaten des jeweils fehlenden Punktes.

a) $A(-3|4)$, $B(5|-7)$, $D(8|11)$
b) $A(3|2)$, $C(8|-7)$, $D(11|15)$
c) $B(3|8)$, $C(3|-2)$, $D(8|5)$
d) $A(3|a)$, $B(2|b)$, $C(4|3)$
e) $A(-3|5|-2)$, $C(1|-4|2)$, $D(3|3|3)$
f) $A(3|3|4)$, $B(-1|4|0)$, $D(2|1|8)$
g) $A(1|8|-7)$, $B(0|0|0)$, $D(3|3|7)$
h) $A(a|a|a)$, $B(a+1|a+2|3)$, $D(a|2|a-1)$

14. Verschiebungsvektor

Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung des Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$.

a) $P(2|4)$, $Q(3|8)$
b) $P(-3|5)$, $Q(7|-2)$
c) $P(1|a)$, $Q(3|2a+1)$
d) $P(4|4|-2)$, $Q(1|5|5)$
e) $P(1|-3|7)$, $Q(4|0|-3)$

15. Verschiebungsvektor

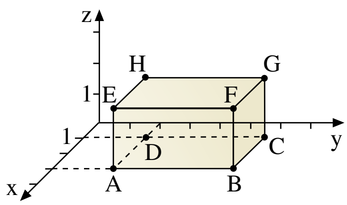
Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ verschiebt den Punkt P in den Punkt Q. Bestimmen Sie P bzw. Q.

a) $P(3|2|1)$
b) $Q(0|0|0)$
c) $P(3|-2|4)$
d) $Q(1|0|2)$
e) $P(4|-3|0)$
f) $P(0|0|0)$
g) $P(1|a|1)$
h) $Q(a|3|0)$
i) $Q(q_1|q_2|q_3)$
j) $P(p_1|p_2|p_3)$

16. Betrag eines Vektors

Der abgebildete Quader habe die Maße $4 \times 2 \times 2$. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung zu allen angegebenen Vektoren sowie ihre Beträge.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HG}$.



17. Betrag eines Vektors

a) Bestimmen Sie die Beträge der Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 32 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ -20 \end{pmatrix}$.

b) Für welchen Wert von a hat der Vektor $\begin{pmatrix} 2a \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ den Betrag 15?

3. Rechnen mit Vektoren

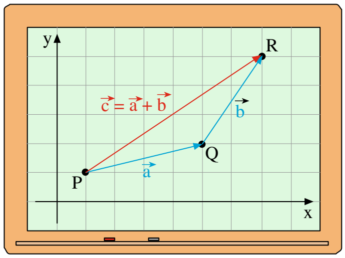
Im Folgenden führen wir Rechenoperationen für Vektoren ein. Da Vektoren als Verschiebungen interpretiert werden können, handelt es sich um Rechenoperationen für Verschiebungen.

A. Addition und Subtraktion von Verschiebungen

Zwei nacheinander ausgeführte Verschiebungen addieren sich in ihrer Wirkung und können durch eine einzige Verschiebung ersetzt werden.
Im Bild wird der Punkt P(1|1) mit dem Vektor $\vec{a} = \binom{4}{1}$ in den Punkt Q(5|2) verschoben, der dann mit dem Vektor $\vec{b} = \binom{2}{3}$ in den Punkt R(7|5) verschoben wird.
Die gleiche Verschiebung von P nach R kann mit dem Vektor $\vec{c} = \binom{6}{4}$ bewirkt werden, der als Summe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ betrachtet werden kann.

$$\vec{a} + \vec{b} = \binom{4}{1} + \binom{2}{3} = \binom{6}{4}$$

Addition durch Aneinanderlegen



Addition von Vektoren:

$$P(1|1) \xrightarrow{\binom{4}{1}} Q(5|2) \xrightarrow{\binom{2}{3}} R(7|5)$$

$$P(1|1) \xrightarrow{\binom{6}{4}} R(7|5)$$

Definition I.2: Rechnerische Addition von Spaltenvektoren
Unter der Summe zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den Vektor, dessen Koordinaten durch Addition der Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entstehen.

Addition in der Ebene

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Addition im Raum

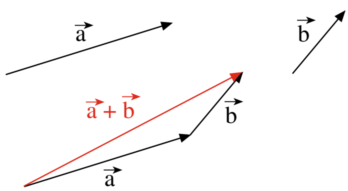
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Geometrische Addition von Vektoren (Dreiecksregel)

Geometrisch führt man die Addition zweier Vektoren mit Hilfe von Pfeilrepräsentanten durch. Da hierbei ein Dreieck enststeht, spricht man von der Dreiecksregel.

Dreiecksregel

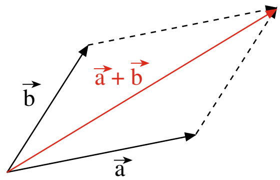
Zur Addition von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ legt man den Anfangspunkt eines Pfeiles von $\vec{b}$ an den Endpunkt des Pfeiles von $\vec{a}$. Der Pfeil der Summe $\vec{a} + \vec{b}$ führt dann vom Anfangspunkt dieser Pfeilkette zu ihren Endpunkt.



Geometrische Addition von Vektoren (Parallelogrammregel)

Es spielt keine Rolle, in welcher Reihenfolge man die Summanden bei der Addition anordnet. $\vec{a} + \vec{b}$ führt zum gleichen Ergebnis wie $\vec{b} + \vec{a}$. Die Addition ist kommutativ. Hieraus ergibt sich die sog. ***Parallelogrammregel*** für die Addition. Sie ist zur Dreiecksregel gleichwertig.

Parallelogrammregel (Addition)
Zur Addition von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ legt man die beiden Vektoren mit ihren Anfangspunkten aneinander und ergänzt die entstandene Figur zu einem Parallelogramm. Der Pfeil der Summe $\vec{a} + \vec{b}$ ist dann der Diagonalpfeil im Parallelogramm, der im gemeinsamen Anfangspunkt beginnt.



Übung 1 Summe von Vektoren

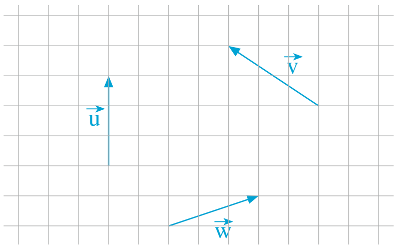
Berechnen Sie die Summe der beiden Vektoren, sofern dies möglich ist.

a) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

Übung 2 Summe von Vektoren

Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die angegebene Summe.*

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} + \vec{w}$ c) $\vec{v} + \vec{w}$
d) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ e) $\vec{v} + \vec{u}$
f) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ g) $\vec{u} + \vec{u}$



Rechengesetze der Vektoraddition

Neben dem Kommutativgesetz gelten für die Addition von Vektoren noch weitere Rechengesetze, die Rechnungen z. T. erheblich erleichtern können.

Satz I.1: Rechengesetze der Vektoraddition
$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien Vektoren in der Ebene oder im Raum. Dann gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetz der Addition	*Assoziativgesetz der Addition*
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

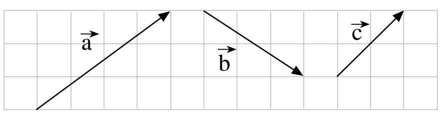
Übung 3 Assoziativgesetz

Bestimmen Sie für die gegebenen Vektoren die Terme $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ und $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Rechnerisch:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Zeichnerisch:*



* Eine Einheit entspricht einer Karolänge.

Subtraktion von Vektoren

Die Gegenoperation zu einer Addition ist die Subtraktion. Für diese Operation benötigen wir ein neutrales Element der Addition, d. h. einen Nullvektor $\vec{0}$. Außerdem wird zu jedem Vektor $\vec{a}$ einen Gegenvektor $-\vec{a}$ benötigt, der die Verschiebungswirkung von $\vec{a}$ aufheben kann.

Satz I.2: Nullvektor
Es gibt genau einen Vektor $\vec{0}$, so dass $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ gilt für alle Vektoren $\vec{a}$.
$\vec{0}$ heißt ***Nullvektor***.
Geometrisch wird er als *Pfeil der Länge 0* ohne bestimmte Richtung interpretiert.

Nullvektor in der Ebene

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

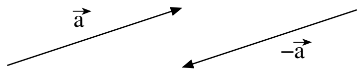
Nullvektor im Raum

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Satz I.3: Gegenvektor
Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es genau einen Gegenvektor $-\vec{a}$, so dass $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ gilt für alle Vektoren $\vec{a}$.
$-\vec{a}$ heißt ***Gegenvektor von*** $\vec{a}$.

Geometrisch wird $-\vec{a}$ durch einen Pfeil erfasst, der die gleiche Länge, aber die umgekehrte Richtung wie $\vec{a}$ besitzt.

Gegenvektor von $\vec{a}$



Gegenvektor in der Ebene

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$$

Gegenvektor im Raum

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

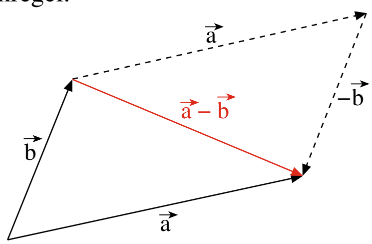
Mit Hilfe des Gegenvektors lässt sich nun die Subtraktion von Vektoren definieren:

Definition I.3: Subtraktion von Vektoren
Die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die Summe aus dem Vektor $\vec{a}$ und dem Gegenvektor von $\vec{b}$.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

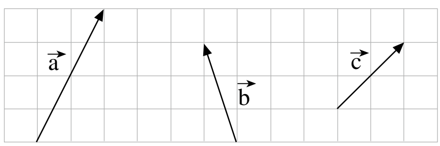
Auch für die Subtraktion gibt es eine Parallelogrammregel.

Parallelogrammregel (Subtraktion)
In dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm verbindet der Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ die Pfeilspitze von $\vec{b}$ mit der Pfeilspitze von $\vec{a}$.



Übung 4 Subtraktion
Konstruieren Sie zeichnerisch den angegebenen Term (siehe auch S. 32).

a) $\vec{a} - \vec{b}$ b) $\vec{b} - \vec{a}$
c) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{a}$ d) $-\vec{b} - \vec{a}$
e) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ f) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

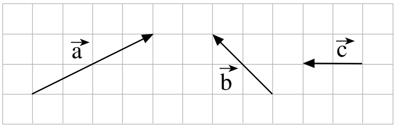


Eine Einheit entspricht einer Karolänge.

Wir rechnen nun einige Beispiele zur Addition und Subtraktion.

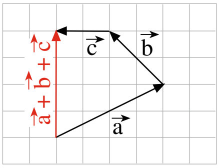
Beispiel: Addition und Subtraktion von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
a) Addieren Sie $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zeichnerisch.
b) Bestimmen sie $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$ zeichnerisch.
c) Bestimmen Sie $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ rechnerisch.



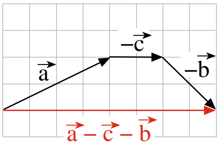
Lösung zu a:
Wir hängen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu einem Vektorzug aneinander. Die Summe $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ist der Vektor, der vom Anfangspunkt des Vektorzuges zum Endpunkt zeigt.

Zeichnerische Addition:



Lösung zu b:
Wir hängen nun die Vektoren $\vec{a}$, $-\vec{c}$ und $-\vec{b}$ zu einem Vektorzug aneinander.
$\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$ ist nun wieder der Vektor, der vom Anfangspunkt des Vektorzugs zum Endpunkt führt.

Zeichnerische Addition:



Lösung zu c:
Wir stellen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Spaltenvektoren dar (Ablesen der Koordinaten aus der Zeichnung). Dann addieren bzw. subtrahieren wir diese rechnerisch. Das Ergebnis entspricht der zeichnerischen Lösung.

Zeichnerische Subtraktion:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel: Addition von Vektoren im dreidimensionalen Raum

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Addieren Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zeichnerisch im Koordinatensystem.

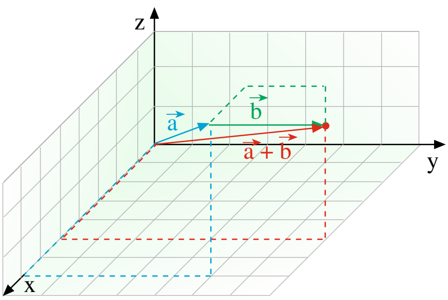
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung:
Wir hängen die zwei Vektoren wieder zu einem Vektorzug aneinander, um sie zu addieren. Zwecks besserer Übersicht deuten wir ihre Koordinaten durch gepunktete Linien an.

Das Resultat: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wir erkennen, dass Vektoren im Raum nicht sehr anschaulich darstellbar sind. Hier sind die rechnerische Addition und Subtraktion einfacher durchzuführen.

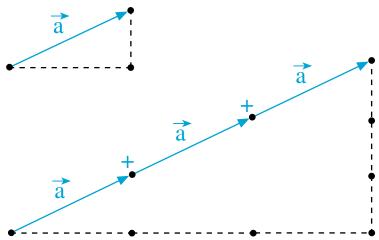
Vektoraddition im Raum:



B. Skalar-Multiplikation (S-Multiplikation)

Die nebenstehend durchgeführte zeichnerische Konstruktion (Addition durch Aneinanderlegen) legt es nahe, die Summe $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ als ***Vielfaches*** von $\vec{a}$ aufzufassen. Man schreibt daher:

$$3 \cdot \vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}.$$

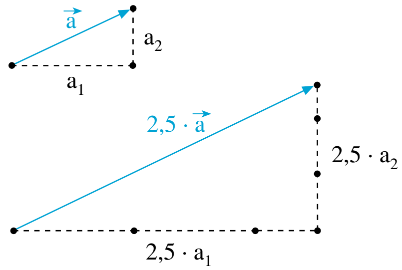


Rechnerisch ergibt sich mit Hilfe koordinatenweiser Addition für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,a_1 \\ 3\,a_2 \end{pmatrix}.$$

Diese koordinatenweise Vervielfachung eines Vektors lässt sich sogar auf beliebige reelle Vervielfältigungsfaktoren ausdehnen,

z. B. $2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5\,a_1 \\ 2{,}5\,a_2 \end{pmatrix}$.



Definition I.4: Skalare Multiplikation

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl s (einem sog. Skalar) multipliziert, indem jede seiner Koordinaten mit s multipliziert wird.

In der Ebene: $s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \end{pmatrix}$ | **Im Raum:** $s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$

Für die S-Multiplikation gelten folgende Rechengesetze:

Satz I.4: r und s seien reelle Zahlen, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren. Dann gelten folgende Regeln:

(I) Distributivgesetz
$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$

(II) Distributivgesetz
$(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$

(III) Assoziativgesetz
$(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$

Wir beschränken uns auf den Beweis zu (I) für Vektoren im Raum.

$$r\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) \underset{\text{Def. I.2}}{=} r\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \underset{\text{Def. I.4}}{=} \begin{pmatrix} r\,(a_1 + b_1) \\ r\,(a_2 + b_2) \\ r\,(a_3 + b_3) \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Distributiv-} \\ \text{gesetz in } \mathbb{R}}}{=} \begin{pmatrix} r\,a_1 + r\,b_1 \\ r\,a_2 + r\,b_2 \\ r\,a_3 + r\,b_3 \end{pmatrix} \underset{\text{Def. I.2}}{=} \begin{pmatrix} r\,a_1 \\ r\,a_2 \\ r\,a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\,b_1 \\ r\,b_2 \\ r\,b_3 \end{pmatrix} \underset{\text{Def. I.4}}{=} r\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Übung 5

Beweisen Sie Satz I.4 (II) sowohl für Vektoren in der Ebene als auch für Vektoren im Raum.

Übungen

6. Vereinfachen Sie den Term zu einem einzigen Vektor.

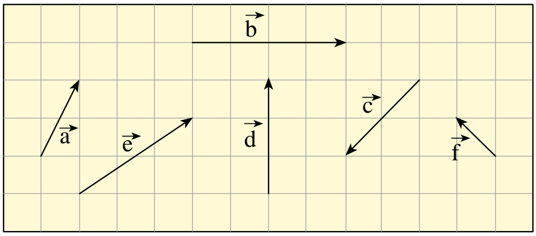
a) $5 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 0{,}6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix}$ b) $5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $3 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$

7. Stellen Sie den gegebenen Vektor in der Form $r\vec{a}$ dar, wobei $\vec{a}$ nur ganzzahlige Koordinaten besitzen soll und r eine reelle Zahl ist.

a) $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}25 \\ 0{,}125 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$

8. Bestimmen Sie das Ergebnis des gegebenen Rechenausdrucks als Spaltenvektor.*

a) $-\vec{a} + \vec{e}$
b) $\vec{d} - \vec{b}$
c) $3\vec{a} + 2\vec{c} + \vec{d}$
d) $2(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{c}) - 2\vec{b}$
e) $\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a}$
f) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} + 3\vec{f}$



9. Vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich.

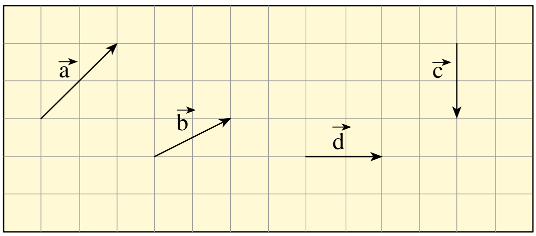
a) $3\vec{a} + 5\vec{a} - 7\vec{a} - (-2\vec{a}) - \vec{a}$
b) $\vec{a} - 4(\vec{b} - \vec{a}) - 2\vec{c} + 2(\vec{b} + \vec{c})$
c) $2(\vec{a} + 4(\vec{b} - \vec{a})) + 2(\vec{c} + \vec{a}) - 6\vec{b}$
d) $2(\vec{a} - \vec{c}) + 0{,}5(\vec{c} - \vec{b}) + 1{,}5(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}$
e) $-(\vec{a} - 2\vec{b} - (7\vec{a} - (-2) \cdot (-\vec{a}))) - (\vec{a} - (-\vec{b}))$
f) $\vec{c} - (\vec{a} - 2\vec{b} + (7\vec{c} - (4\vec{b} - 2\vec{c})) - 2\vec{c})$
g) $(4\vec{b} - \vec{a} - (-2\vec{b})) \cdot 3 - 3(-4\vec{a} - (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (-1))$
h) $5\vec{b} - (\vec{a} - 4\vec{b} + 3(\vec{a} - 7\vec{b})) \cdot (-2) - 5(-9\vec{b} + 1{,}6\vec{a})$

10. Berechnen Sie den Wert der Variablen x, sofern eine Lösung existiert.

a) $x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 4 \\ x \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 10 \\ x+2 \end{pmatrix}$
d) $x \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6x \\ 18 \\ 2x \end{pmatrix}$

11. Prüfen Sie, ob die angegebene Gleichung richtig ist.

a) $\vec{a} + 2\vec{b} = 3\vec{d} - 2\vec{c}$
b) $\vec{a} - \vec{c} = \vec{d} - 3\vec{c}$
c) $\vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{c}$
d) $2\vec{d} - (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{0}$
e) $\vec{a} + 2\vec{d} = 2\vec{b} + \vec{d}$

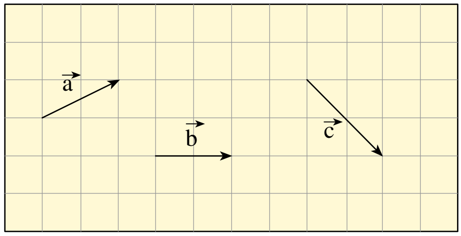


* Eine Einheit entspricht einer Karolänge.

C. Exkurs: Kombination von Rechenoperationen/Vektorzüge

Die Addition bzw. Subtraktion und Skalarmultiplikation von mehr als zwei Vektoren kann mit Hilfe von sogenannten Vektorzügen vereinfacht und sehr effizient durchgeführt werden.

Beispiel: Addition durch Vektorzug
Gegeben sind die rechts dargestellten Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Konstruieren Sie zeichnerisch den Vektor $\vec{x} = \vec{a} + 2\,\vec{b} + 1{,}5\,\vec{c}$. Führen Sie eine rechnerische Ergebniskontrolle durch.



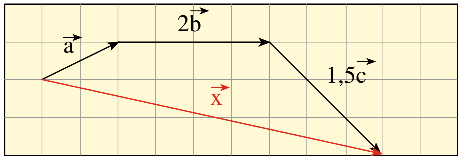
Lösung:
Wir setzen die Vektoren $\vec{a}$, $2\,\vec{b}$ und $1{,}5\,\vec{c}$ wie abgebildet aneinander.

Es entsteht ein ***Vektorzug***.

Der gesuchte Vektor führt vom Anfang zum Ende des Vektorzugs. Er bewirkt die gleiche Verschiebung wie die drei Einzelterme insgesamt, ist also deren Summe.

Rechnerisch erhalten wir das gleiche Resultat, indem wir $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit Hilfe von Spaltenvektoren darstellen.

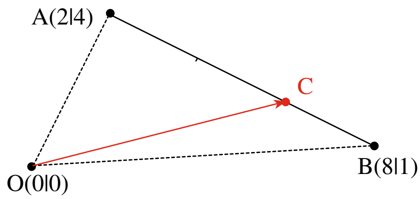
Zeichnerische Lösung:



Rechnerische Lösung:

$$\vec{x} = \vec{a} + 2\,\vec{b} + 1{,}5\,\vec{c}$$
$$= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 1{,}5\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$$

Beispiel: Drittelung einer Strecke
Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ mit den Endpunkten $A(2|4)$ und $B(8|1)$. Punkt C teilt die Strecke im Verhältnis 2 : 1.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C.

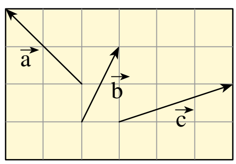


Lösung:
Der Ortsvektor $\overrightarrow{OC}$ des gesuchten Punktes C lässt sich durch den Vektorzug $\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ darstellen, wie dies aus der Skizze zu erkennen ist.
Die rechts aufgeführte Rechnung führt auf das Resultat $C(6|2)$.

Berechnung des Ortsvektors von C:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$= \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$$

Übung 12 Vektoraddition
Bestimmen Sie durch Zeichnung und Rechnung die Vektoren $\vec{x} = \vec{a} + 2\,\vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ und $\vec{z} = \vec{a} - 0{,}5\,\vec{b} + 2\,\vec{c}$.



Oft muss man den Mittelpunkt einer Strecke ermitteln. Hierfür gibt es eine Formel, die wir nun herleiten.

Der Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$ lässt sich als arithmetisches Mittel der Streckenendpunkte A und B berechnen.

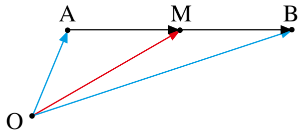
Mittelpunkt einer Strecke

M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Dann gilt:

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Der vektorielle Nachweis steht rechts.

Beweis zum Streckenmittelpunkt



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\\ &= \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\\ &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\end{aligned}$$

Beispiel: Streckenmittelpunkt

Berechnen Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ mit den Endpunkten A (4|3|4) und B (2|9|10).

Lösung:

Wir verwenden die obige Formel für den Streckenmittelpunkt M, welche im Prinzip das arithmetrische Mittel der Streckenendpunkte darstellt.

Streckenmittelpunkt

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\9\\10\end{pmatrix}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\12\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\7\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ M = M (3|6|7)

Resultat: Streckenmittelpunkt M (3|6|7)

Übung 13 Streckenmittelpunkt

Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ mit A (–2|–4|4) und B (6|8|12).

Übung 14 Streckenmittelpunkt – Umkehraufgabe

Die Strecke $\overline{AB}$, die im Punkt A (4|4|6) beginnt, hat den Mittelpunkt M (2|6|7). Bestimmen Sie B.

Übung 15 Mittelpunkt eines Quaders

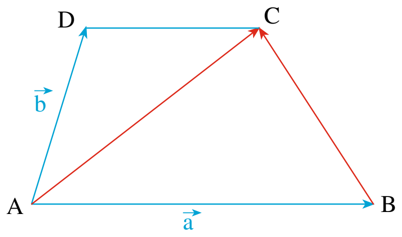
Gesucht ist der Mittelpunkt M eines Quaders ABCDEFGH mit den Ecken A (6|5|0), B (0|13|0), C (–4|10|0), D (2|2|0) und E (6|5|4).

a) Bestimmen Sie zunächst die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte F, G und H und skizzieren Sie den Quader im Koordinatensystem.
b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Seitenkante FG.
c) Stellen Sie den Mittelpunkt der Deckfläche EFGH des Quaders als Mittelpunkt einer Strecke dar und berechnen Sie seine Koordinaten.
d) Stellen Sie den Mittelpunkt M des Quaders als Mittelpunkt einer Strecke dar und berechnen Sie seine Koordinaten.
e) Beschreiben Sie, worin sich die Mittelpunkte von Quadern und Kugeln unterscheiden.

Geometrische Figuren können oft durch einige wenige Basisvektoren festgelegt bzw. aufgespannt werden. Weitere in den Figuren auftretende Vektoren können dann mit Hilfe dieser Basisvektoren als Vektorzug dargestellt werden.

Beispiel: Vektoren im Trapez

Ein Trapez wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. Die Decklinie des Trapezes ist halb so lang wie die Grundlinie.
Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.



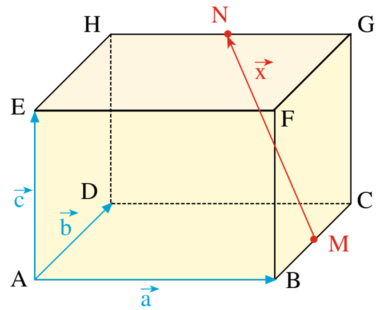
Lösung:
Wir arbeiten zur Darstellung mit Vektorzügen, die $\vec{a}$ und $\vec{b}$ enthalten. Dabei beachten wir, dass $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$ gilt, denn $\overrightarrow{DC}$ ist parallel zu $\vec{a}$ und halb so lang.
Die Rechenwege und Resultate sind rechts aufgeführt.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\vec{a} + \vec{b} + \tfrac{1}{2}\vec{a} = \vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{a}$$

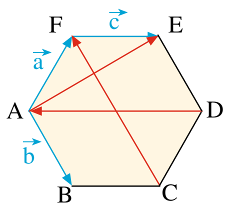
Übung 16 Vektoren im Quader

Der abgebildete Quader wird durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. Der Vektor $\vec{x}$ verbindet die Mittelpunkte M und N zweier Quaderkanten.
Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ mit Hilfe der aufspannenden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.



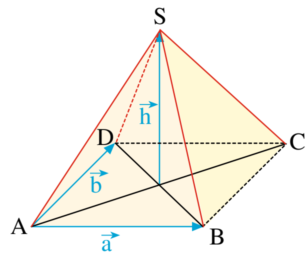
Übung 17 Vektoren im Sechseck

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ definieren ein Sechseck. Stellen Sie die Transversalenvektoren $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DA}$ und $\overrightarrow{CF}$ mit Hilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.



Übung 18 Vektoren in einer Pyramide

Eine gerade Pyramide hat eine quadratische Grundfläche ABCD und die Spitze S. Sie wird von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{h}$ wie abgebildet aufgespannt. Stellen Sie die Seitenkantenvektoren $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{CS}$ und $\overrightarrow{DS}$ mit Hilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{h}$ dar.



D. Linearkombination von Vektoren

Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben, lassen sich weitere Vektoren $\vec{x}$ der Form $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ aus den gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugen. Eine solche Summe nennt man ***Linearkombination*** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Man kann den Begriff folgendermaßen verallgemeinern.

Eine Summe der Form $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + r_n \cdot \vec{a}_n$ $(r_i \in \mathbb{R})$ nennt man ***Linearkombination*** der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Beispiel: Darstellung eines Vektors als Linearkombination (LK)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ sowie $\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{c}$ als LK von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{d}$ **nicht** als LK von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden kann.

Wir versuchen, die Vektoren $\vec{c}$ bzw. $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darzustellen. Dies führt jeweils auf ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Variablen. Wenn es lösbar ist, ist die gesuchte Darstellung gefunden, andernfalls ist sie nicht möglich.

Lösung zu a:

Ansatz: $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Gl.-system:
I $2r + s = 3$
II $r + s = 1$
III $r + 2s = 0$

Lösungsversuch:
IV I − II: $r = 2$
V IV in I: $s = -1$

Überprüfung: IV, V in III: $0 = 0$ ist wahr

Ergebnis:

$r = 2,\ s = -1$

$\vec{c}$ ist als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellbar: $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

Lösung zu b:

Ansatz: $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Gl.-system:
I $2r + s = 3$
II $r + s = 1$
III $r + 2s = 2$

Lösungsversuch:
IV I − II: $r = 2$
V IV in I: $s = -1$

Überprüfung: IV, V in III: $0 = 2$ ist falsch

Ergebnis:

Das Gleichungssystem ist unlösbar.

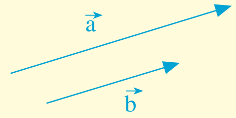
$\vec{d}$ ist **nicht** als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellbar.

Übung 19 Linearkombination

Überprüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{c} = \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{d} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ dargestellt werden können.

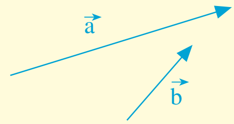
E. Kollineare und komplanare Vektoren

Zwei Vektoren, deren Pfeile parallel verlaufen, bezeichnet man als ***kollinear***. Sie verlaufen parallel, können aber eine unterschiedliche Orientierung und Länge haben. Ein Vektor lässt sich dann als Vielfaches des anderen Vektors darstellen.



Kollineare Vektoren

$\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ *oder* $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$



Nicht kollineare Vektoren

Beispiel: Kollineare Vektoren

a) Prüfen Sie rechnerisch, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$, $\vec{c}$ kollinear sind.

b) Versuchen Sie anschließend, die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zeichnerisch auf Kollinearität zu überprüfen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu a:

Der rechnerische Kollinearitätsansatz $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ führt auf einen Widerspruch, da r nicht zugleich 2, 1,25 und 1,5 sein kann. Daher sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear.

Kollinearitätsüberprüfung für $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

Ansatz: $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4 = 2r \\ 5 = 4r \\ 3 = 2r \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = 2 \\ r = 1{,}25 \\ r = 1{,}5 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ nicht kollinear

Der Ansatz $\vec{c} = r \cdot \vec{a}$ führt auf eine Lösung für $r = -0{,}5$. Daher gilt $\vec{c} = -0{,}5 \cdot \vec{a}$. $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind also kollinear.

Kollinearitätsüberprüfung für $\vec{a}$ und $\vec{c}$:

Ansatz: $\vec{c} = r \cdot \vec{a}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -1 = 2r \\ -2 = 4r \\ -1 = 2r \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r = -0{,}5 \\ r = -0{,}5 \\ r = -0{,}5 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \vec{c} = -0{,}5 \cdot \vec{a} \Rightarrow$ kollinear

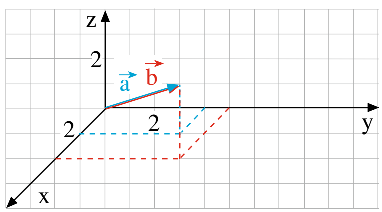
Lösung zu b:

Wir zeichnen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in ein dreidimensionales Koordinatensystem ein. Beide sehen exakt gleich aus, sind es aber offensichtlich nicht.

Hier wird Gleichheit und damit Kollinearität nur vorgetäuscht.

Es ist also eher ungünstig, Kollinearität im Raum zeichnerisch entscheiden zu wollen.

Versuch der zeichnerischen Lösung



Übung 20 Kollinearitätsprüfung

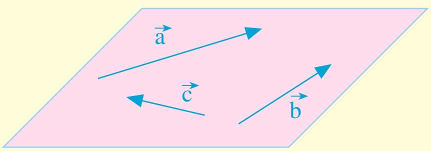
Prüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren kollinear sind.

a) $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\-10\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-12\\3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}4\\-2\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-3\\12\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-9\\8\end{pmatrix}$

Übung 21 Trapeznachweis

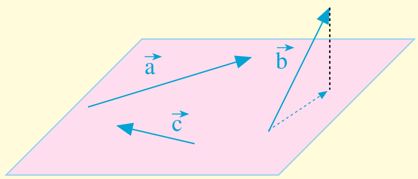
Gegeben sind im räumlichen Koordinatensystem die Punkte A (3|2|−2), B (0|8|1), C (−1|3|3) und D (1|−1|1). Zeigen Sie, dass ABCD ein Trapez ist. Fertigen Sie ein Schrägbild an.
Hinweis: Ein Trapez ABCD ist dadurch gekennzeichnet, dass mindestens ein Paar gegenüberliegender Seiten Parallelität aufweist.

Drei Vektoren, deren Pfeile sich in ein- und derselben Ebene darstellen lassen, bezeichnet man als ***komplanar***. Dies bedeutet, dass mindestens einer der beteiligten Vektoren als Linearkombination der anderen beiden Vektoren darstellbar ist.



Komplanare Vektoren

$\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ *oder* $\vec{b} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{c}$
oder $\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$



Nicht komplanare Vektoren

$\vec{c} \neq r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ *und* $\vec{b} \neq r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{c}$
und $\vec{a} \neq r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$

▶ Beispiel: Komplanare Vektoren

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind. $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

Lösung:
Wir wählen einen der drei möglichen Ansätze für Komplanarität:

$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$.

Der Ansatz führt auf ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem (s. rechts).
Es ist eindeutig lösbar mit den Lösungen r = 3 und s = −1.

Daher gilt: $\vec{a} = 3 \cdot \vec{b} - \vec{c}$.

▶ Also sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar.

Komplanaritätsuntersuchung:

Ansatz: $\begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ I $\quad r + 2s = 1$
II $\quad 2r - s = 7$
III $\quad r + s = 2$

I − III: s = −1
in III: $r - 1 = 2 \Rightarrow r = 3$
in II (Probe): $2 \cdot 3 - (-1) = 7$ ist wahr
$\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar.

Übung 22 Kollineare Vektoren

Wie muss der Parameter a gewählt werden, damit die beiden gegebenen Vektoren kollinear sind?

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 18 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 6 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$

Übung 23 Komplanare Vektoren

Prüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren komplanar sind.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

F. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Kollineare Vektoren und komplanare Vektoren bezeichnet man auch als ***linear abhängig***, da jeweils einer der beteiligten Vektoren sich als Linearkombination der restlichen Vektoren darstellen lässt. Ist dies nicht möglich, so bezeichnet man die Vektoren als ***linear unabhängig***.

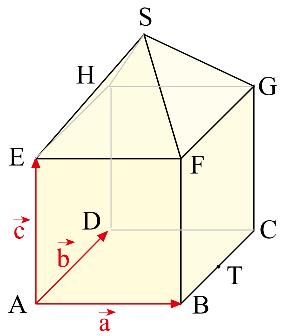
Zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des zweidimensionalen Anschauungsraumes $\mathbb{R}^2$ bezeichnet man als eine ***Basis*** des zweidimensionalen Raumes, da sich jeder andere Vektor des zweidimensionalen Raumes als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lässt.

Analog bilden drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des dreidimensionalen Anschauungsraumes $\mathbb{R}^3$ eine Basis des dreidimensionalen Raumes. Jeder andere Vektor des dreidimensionalen Raumes lässt sich dann als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen.

Beispiel: Basis

In dem abgebildeten Haus haben alle Kanten die gleiche Länge. Begründen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis bilden. Stellen Sie die folgenden Vektoren als Linearkombination der Basisvektoren dar.

$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{TH}, \overrightarrow{ES}, \overrightarrow{BS}$



Lösung:

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen nicht in einer Ebene und sind daher linear unabhängig. Folglich bilden sie eine Basis des dreidimensionalen Raumes. Jeder Vektor kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden, insbesondere auch alle innerhalb des Hauses realisierbaren Vektoren.

$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{CE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{ED} = \vec{b} - \vec{c}$

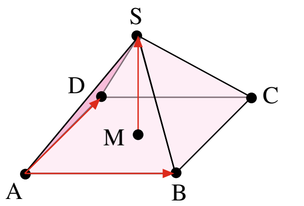
$\overrightarrow{TH} = -\vec{a} + 0{,}5\,\vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{ES} = 0{,}5\,\vec{a} + 0{,}5\,\vec{b} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{c}$

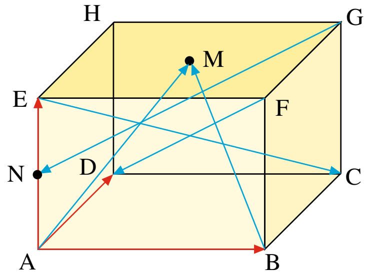
$\overrightarrow{BS} = -0{,}5\,\vec{a} + 0{,}5\,\vec{b} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{c}$

Übungen

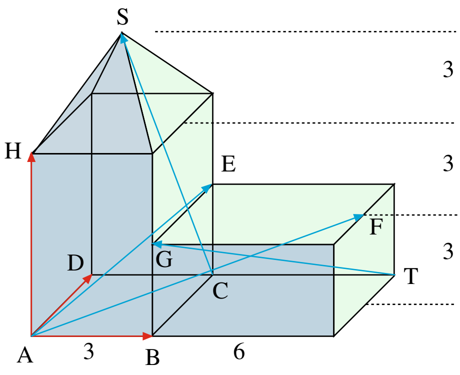
24. Stellen Sie den angegebenen Vektor als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{MS}$
a) $\overrightarrow{AS}$ b) $\overrightarrow{BS}$
c) $\overrightarrow{SC}$ d) $\overrightarrow{BD}$



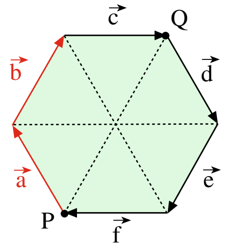
25. Stellen Sie den angegebenen Vektor als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$
a) $\overrightarrow{AM}$ b) $\overrightarrow{BM}$
c) $\overrightarrow{GN}$ d) $\overrightarrow{FD}$ bzw. $\overrightarrow{EC}$



26. Stellen Sie den angegebenen Vektor als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AH}$
a) $\overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{AF}$
c) $\overrightarrow{HS}$ d) $\overrightarrow{TG}$
F und G sind Seitenmitten.



27. Rechts ist ein regelmäßiges zweidimensionales Sechseck abgebildet.
a) Stellen Sie die Vektoren $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.
b) Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.



28. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.
a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nicht komplanar sind.
b) Stellen Sie die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

G. Exkurs: Vertiefung zur linearen Unabhängigkeit

Das Kriterium zur Komplanarität bzw. Nichtkomplanarität von drei Vektoren im Raum ist zwar sehr anschaulich, kann aber dazu führen, dass eventuell drei Fälle untersucht werden müssen. Die folgenden Kriterien sind zwar etwas abstrakter, benötigen aber stets nur eine Rechnung.

Kriterium zur linearen Abhängigkeit:
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann linear abhängig (komplanar), wenn es drei reelle Zahlen r, s, t gibt, die nicht alle null sind, sodass gilt: $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$.

Für drei nicht komplanare Vektoren gilt entsprechend:

Kriterium zur linearen Unabhängigkeit:
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind genau dann linear unabhängig (nicht komplanar), wenn die Gleichung $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $r = s = t = 0$ hat.

Im folgenden Beispiel wird die Leistungsfähigkeit der Kriterien exemplarisch dargestellt.

Beispiel: Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit
Untersuchen Sie, ob die Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Lösung zu a:

Ansatz: $r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2r \phantom{{}+s} + t = 0 \\ \text{II} & r + s + t = 0 \\ \text{III} & t = 0 \end{array}$$

Aus III folgt $t = 0$. Aus I folgt damit $r = 0$. Nun folgt aus II auch noch $s = 0$. Insgesamt $r = s = t = 0$
Die Vektoren sind also linear unabhängig.

Lösung zu b:

Ansatz: $r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2r + 3s + t = 0 \\ \text{II} & r + s + t = 0 \\ \text{III} & -s + t = 0 \end{array}$$

$\text{I} - 2 \cdot \text{II}$: $s - t = 0$; entspricht III
Daher: $t = 1$ frei wählen
$\Rightarrow s = 1 \Rightarrow r = -2$
Die Vektoren sind also linear abhängig.

Man kann den Begriff der linearen Unabhängigkeit bzw. der linearen Abhängigkeit auf n Vektoren verallgemeinern. Die hier formulierten Kriterien gelten auch für diesen allgemeinen Fall.
n Vektoren sind linear unabhängig, wenn der Nullvektor nur die „triviale Darstellung" als Linearkombination dieser n Vektoren zulässt, deren Koeffizienten alle 0 sind.
Mehr als drei Spaltenvektoren im Raum sind immer linear abhängig.

Übung 29
Prüfen Sie auf lineare Abhängkeit.

a) $\begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

Mit den behandelten Methoden können auch Vektoren mit Parametern auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit überprüft werden.

Beispiel: Lineare Abhängigkeit bei Vektoren mit Parametern

Für welche Werte von u sind $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\3\\u\end{pmatrix}$ linear abhängig?

Lösung:
Wir versuchen, den Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darzustellen. Daher der Ansatz: $\vec{c} = r\,\vec{a} + s\,\vec{b}$.

Ansatz:

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\u\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Aus den Gleichungen I und II des äquivalenten linearen Gleichungssystems folgt $r = 2$ und $s = -1$. Einsetzen in III ergibt $u = 3$.

Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I} & r + 3s = -1\\ \text{II} & r - s = 3\end{array}\right\} \Rightarrow r = 2,\ s = -1$$
$$\text{III}\quad 2r + s = u \quad \Rightarrow u = 3$$

Für $u = 3$ gilt also $\vec{c} = 2\,\vec{a} + (-1)\,\vec{b}$.
Für diesen Wert des Parameters sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.
Für $u \neq 3$ sind sie linear unabhängig.

Ergebnis:

$$2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

Nun wird gezeigt, wie man beweist, dass die lineare Unabhängigkeit von Vektoren, $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auch die lineare Unabhängigkeit von bestimmten Summen aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zur Folge hat.

Übung 30 Linear unabhängige Vektoren
Untersuchen Sie, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix}6\\2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\\9\end{pmatrix}$

Übung 31 Linear abhängige Vektoren
Für welchen Wert des Parameters a sind die gegebenen Vektoren linear abhängig?

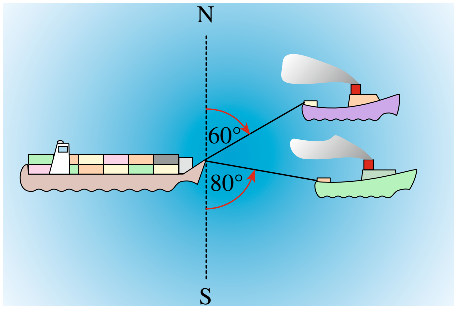
a) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\a\\-1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\8\\-5\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}a\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}$

Übung 32 Komplanarität
Begründen Sie: Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, so sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und ein beliebiger Vektor $\vec{c}$ immer komplanar.

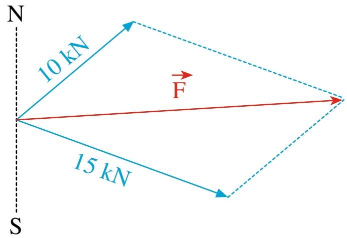
H. Exkurs: Anwendungen des Rechnens mit Vektoren

Das Rechnen mit Vektoren hat praktische Anwendungsbezüge. Vektoren sind gut geeignet, gerichtete Größen wie Kräfte und Geschwindigkeiten zu modellieren. Wir behandeln exemplarisch ein einfaches Beispiel.

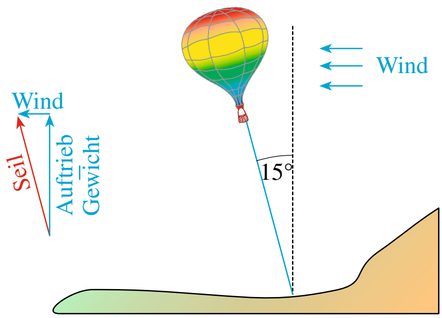
Beispiel: Die resultierende Kraft
Ein Lastkahn K wird von zwei Schleppern auf See wie abgebildet gezogen. Schlepper A zieht mit einer Kraft von 10 kN in Richtung N60°O*. Schlepper B zieht mit 15 kN in Richtung S80°O. Wie groß ist die resultierende Zugkraft? In welche Richtung bewegt sich die Formation insgesamt?



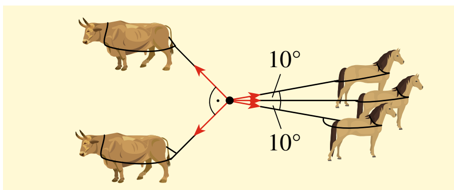
Lösung:
Wir zeichnen die beiden Zugkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ maßstäblich (z. B. 1 kN = 1 cm), bilden ihre vektorielle Summe $\vec{F}$ (Resultierende) und messen deren Betrag und Richtung. Wir erhalten eine Kraft von $|\vec{F}| = 23{,}5$ kN in Richtung N84°O.



33. Kräfte am Fesselballon
Ein Gasballon mit einem Gewicht von 5000 N ist wie abgebildet an einem Seil befestigt. Das Gas erzeugt eine Auftriebskraft von 10 000 N. Durch Seitenwind wird der Ballon um 15° aus der Vertikalen gedrängt. Mit welcher Kraft wirkt der Wind auf den Ballon? Wie groß ist die Kraft im Halteseil? Zeichnen Sie zur Lösung der Aufgabe ein Kräftediagramm.



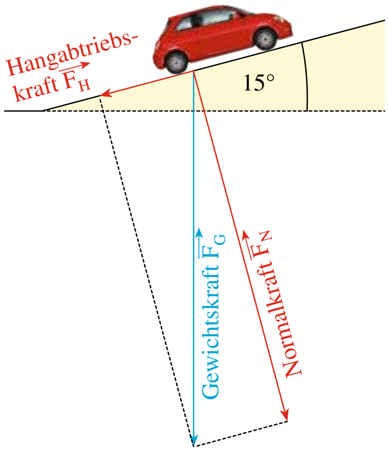
34. Wer gewinnt?
Drei Pferde ziehen wie abgebildet nach rechts, zwei Stiere ziehen nach links. Ein Stier ist doppelt so stark wie ein Pferd. Wer gewinnt den Kampf?



* Die Angabe N60°O bedeutet: Das Objekt bewegt sich nach Norden mit einer Abweichung von 60° nach Osten.

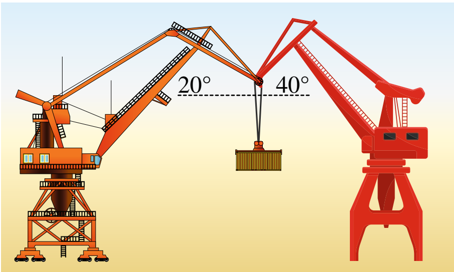
Im Folgenden ist im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel die resultierende Kraft gegeben. Gesucht sind nun Komponenten dieser Kraft in bestimmte vorgegebene Richtungen.

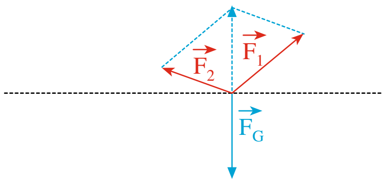
Beispiel: Antriebskraft am Hang
Welche Antriebskraft muss ein 1200 kg schweres Auto mindestens aufbringen, um einen 15° steilen Hang hinauffahren zu können?



Lösung:
Wir fertigen eine Zeichnung an. Die Gewichtskraft des Autos beträgt ca. 12 000 N. Sie zeigt senkrecht nach unten. Wir zerlegen sie additiv in eine zum Hang senkrechte Normalkraft und eine zum Hang parallele Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$.
Maßstäbliches Ausmessen ergibt die Beträge $|\vec{F}_N| = 11\,600$ N und $|\vec{F}_H| = 3100$ N. Die Antriebskraft des Autos muss nur den Hangabtrieb ausgleichen, d. h. sie muss mindestens 3100 N betragen.

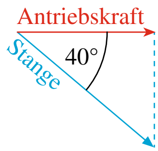
Beispiel: Seilkräfte
Zwei Kräne heben ein 10 000 kg schweres Bauteil mit Hilfe von Drahtseilen. Wie groß sind die Seilkräfte?





Lösung:
Die Gewichtskraft beträgt ca. 100 000 N. Sie muss durch eine gleich große, nach oben gerichtete Gegenkraft ausgeglichen werden. Mit Hilfe eines Parallelogramms konstruieren wir zwei längs der Seile wirkende Kräfte, deren resultierende Summe genau diese Gegenkraft ergibt.
Durch maßstäbliches Zeichnen und Ablesen erhalten wir $|\vec{F}_1| = 108\,500$ N und $|\vec{F}_2| = 88\,500$ N.

Übung 35
Ein Gärtner schiebt einen Rasenmäher wie abgebildet auf einer ebenen Wiese. Er muss eine Schubkraft von 200 N in Richtung der Schubstange aufbringen. Welche Antriebskraft müsste ein gleich schwerer motorisierter Rasenmäher besitzen, um die gleiche Wirkung zu erzielen?



Übungen

36. Schrägbild und Volumen einer Pyramide

Gegeben sind die Punkte A (0|4|2), B (6|4|2), C (10|8|2), D (4|8|2) und S (5|6|8). Sie bilden eine Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide. Bestimmen Sie den Fußpunkt F der Höhe.

b) Zeigen Sie, dass ABCD ein Parallelogramm ist. Bestimmen Sie das Pyramidenvolumen.

37. Addition und Subtraktion von Vektoren, der Betrag eines Vektors

a) Gegeben sind die Spaltenvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Betrag von $\vec{x}$.

$\vec{x} = \vec{a}$, $\vec{x} = \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{x} = \vec{a} + 2\,\vec{b}$, $\vec{x} = \vec{b} - 2\,\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{x} = 2\,\vec{a} - \vec{b} - 2\,\vec{c}$

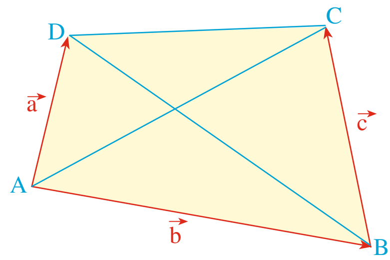
b) Gegeben sind die Punkte P (2|2|1), Q (5|10|15), R (3|a|0), S (4|6|5). Wie muss a gewählt werden, wenn die Differenz der Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ den Betrag 11 besitzen soll?

38. Vektoren im Viereck

Das abgebildete Viereck wird von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt.

a) Stellen Sie die folgenden Vektoren mit Hilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.
$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$

b) Es sei A (4|0|0), B (2|4|2), C (0|2|3) und D (4|−6|−1). Bestimmen Sie den Umfang des Vierecks und begründen Sie, dass es ein Trapez ist.



39. Parallelogramme

Ein Dreieck ABC kann durch Hinzunahme eines weiteren Punktes D zu einem Parallelogramm ergänzt werden. Es gibt stets drei Möglichkeiten für die Konstruktion eines solchen Punktes D. Bestimmen Sie diese Möglichkeiten für folgende Dreiecke:

a) A (2|4), B (8|3), C (4|6)
Lösen Sie die Aufgabe im Koordinatensystem zeichnerisch.

b) A (4|6|3), B (2|8|5), C (0|0|4)
Lösen Sie die Aufgabe rechnerisch mit Hilfe von Spaltenvektoren.

40. Linearkombination von Vektoren, komplanare Vektoren

a) Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dar.

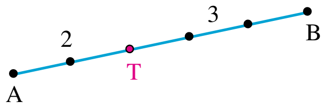
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Untersuchen Sie, ob $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellbar ist.

c) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ komplanar?

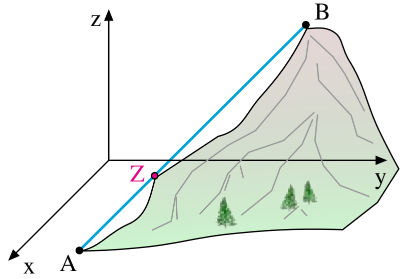
I. Teilverhältnisse von Strecken

Die abgebildete Strecke $\overline{AB}$ ist in fünf gleich lange Abschnitte unterteilt. Der eingezeichnete Punkt T teilt die Strecke im Verhältnis 2 : 3, denn es gilt $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{TB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.



Im folgenden Beispiel kann man das Teilverhältnis nicht so einfach ablesen sondern man muss es erst errechnen.

Beispiel: Seilbahn
Eine Seilbahn verbindet die Talstation A (6|2|0) mit der Gipfelstation B (3|8|6). Es gibt noch eine Zwischenstation Z (5|4|2). In welchem Verhältnis teilt der Zwischenpunkt Z die Gesamtstrecke $\overline{AB}$?



Lösung:
Wir verwenden den Ansatz $\overrightarrow{AZ} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{ZB} = (1-\alpha) \cdot \overrightarrow{AB}$.
Dies führt nach Einsetzen der Punktkoordinaten von A, B und Z zu $\alpha = \frac{1}{3}$ und $1 - a = \frac{2}{3}$.
Daraus ergibt sich:
Der Punkt Z teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 1 : 2.

Rechnung:

$\overrightarrow{AZ} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$

$\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\6\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$

$\overrightarrow{ZB} = (1-\alpha) \cdot \overrightarrow{AB}$

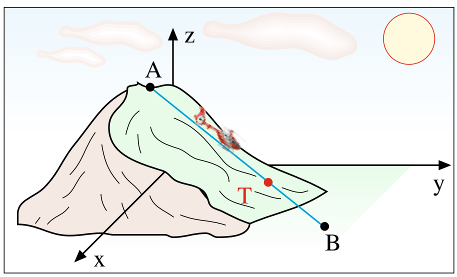
$\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix} = (1-\alpha) \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\6\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (1-\alpha) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AZ} : \overrightarrow{ZB} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$

Übung 41 Streckenteilung
In welchem Verhältnis teilt der Punkt T die Strecke $\overline{AB}$? Fertigen Sie eine Skizze an!
a) A (6|2|0), B (1|12|5), T (3|8|3)
b) A (–2|–4|1), B (4|8|4), T (0|0|3)

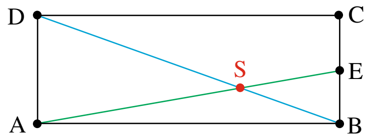
Übung 42 Landeanflug
Ein Hubschrauber startet auf dem Berggipfel A (1|0|6) und fliegt geradlinig zur Bodenstation B (7|6|0).
Welchen Anteil an der Gesamtstrecke hat er zurückgelegt, wenn er den Zwischenpunkt T (5|4|2) erreicht hat?



Teilverhältnisse kommen oft auch in abstrakten geometrischen Figuren vor. Dann beruht ihre Berechnung auf ***geschlossenen Vektorzügen*** bzw. ***Vektorketten*** wie im folgenden Beispiel.

Beispiel: Teilverhältnisse im Rechteck

Im Rechteck ABCD halbiert der Punkt E die Seite $\overline{BC}$. In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt S die Diagonale $\overline{DB}$ bzw. die Transversale $\overline{AE}$?



Lösung:

1. Basisvektoren / Vektorzug

Im ersten Schritt legen wir zwei linear unabhängige ***Basisvektoren*** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ fest, mit denen sich alle anderen Vektoren der Figur darstellen lassen. Geeignet sind die Seitenkantenvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

Außerdem legen wir einen ***geschlossenen Vektorzug*** fest, der eine Teilstrecke der Diagonalen $\overline{DB}$ und eine Teilstrecke der Transversalen $\overline{AE}$ enthält: z. B. den Vektorzug $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{AD}$ (s. Abb.).

2. Darstellung der Teilstrecken

Die Vektoren $\overrightarrow{DS}$ und $\overrightarrow{SA}$ lassen sich als nichtganzzahlige Vielfache von $\overrightarrow{DB}$ (Diagonale) und $\overrightarrow{AE}$ (Transversale) darstellen:
$\overrightarrow{DS} = \alpha \cdot \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AS} = \beta \cdot \overrightarrow{AE}$

3. Berechnung von α und β

Wir berechnen nun die Faktoren α und β, welche die gesuchten Teilverhältnisse festlegen. Im geschlossenen Vektorzug gilt $\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

In dieser Gleichung stellen wir nun die dort auftretenden Vektoren mit Hilfe der Basisvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar, wie rechts ausgeführt ist. Wir erhalten die Gleichung
$(\alpha - \beta) \cdot \vec{a} + \left(-\alpha - \frac{1}{2}\beta + 1\right) \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, müssen die Klammerterme null sein. Dies liefert das Gleichungssystem

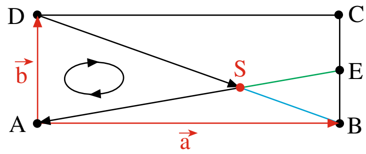
I. $\alpha - \beta = 0$, II. $-\alpha - \frac{1}{2}\beta + 1 = 0$,

dessen Lösungen $\alpha = \frac{2}{3}$ und $\beta = \frac{2}{3}$ sind.

4. Interpretation

S teilt die Diagonale $\overline{DB}$ und die Transversale $\overline{AE}$ im Verhältnis 2 : 1 (s. Abb. rechts).

Basisvektoren und Vektorzug



Darstellung von Teilstrecken:

$\overrightarrow{DS} = \alpha \cdot \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AS} = \beta \cdot \overrightarrow{AE}$

Berechnung von α und β:

$$\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$
$$\alpha \cdot \overrightarrow{DB} + (-\beta \cdot \overrightarrow{AE}) + \vec{b} = \vec{0}$$
$$\alpha(-\vec{b} + \vec{a}) - \beta\left(\vec{a} + \tfrac{1}{2}\vec{b}\right) + \vec{b} = \vec{0}$$
$$(\alpha - \beta) \cdot \vec{a} + \left(-\alpha - \tfrac{1}{2}\beta + 1\right) \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Lineares Gleichungssystem

I. $\alpha - \beta = 0$, II. $-\alpha - \frac{1}{2}\beta + 1 = 0$

I + II: $-\frac{3}{2}\beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}$

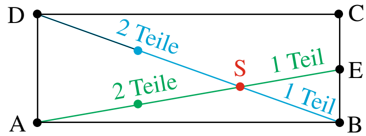
in I: $\alpha - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$

Interpretation

$\overrightarrow{DS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{SB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

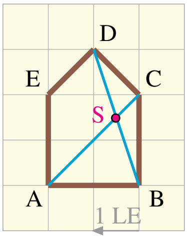
$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{SE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow$ S teilt $\overline{DB}$ im Verhältnis 2 : 1.
S teilt $\overline{AE}$ im Verhältnis 2 : 1.



Manchmal sind ganz konkrete Figuren gegeben. Dann muss man nicht ganz so abstrakt wie im vorhergehenden Beispiel vorgehen, sondern kann die involvierten Vektoren als konkrete Spaltenvektoren ablesen.

Beispiel: Fachwerk
In welchem Verhältnis teilt der Kreuzungspunkt S der beiden Balken AC und BD die Balken des Fachwerks der Giebelwand eines Hauses.
Verwenden Sie Spaltenvektoren.



Lösung:
Wir bilden zunächst einen geschlossenen Vektorzug, der den Teilungspunkt S enthält, z. B. $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{CB}$.
Die Summe dieser Vektoren ist also der Nullvektor: $\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ (1).

Nun stellen wir $\overrightarrow{SC}$ mithilfe von $\overrightarrow{AC}$ dar und $\overrightarrow{BS}$ mithilfe von $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{SC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BS} = \beta \cdot \overrightarrow{BD}$. Dies setzen wir in (1) ein. Anschließend lesen wir aus der Zeichnung die konkreten Spaltenvektorkoordinaten von $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{CB}$ ab und setzen diese ein.

Wir erhalten die Vektorgleichung (3), die auf das lineare Gleichungssystem (4) führt. Dieses hat die Lösung $\alpha = \frac{1}{4}$ und $\beta = \frac{1}{2}$.

Daraus ergeben sich die gesuchten Teilverhältnisse.

Resultat: S teilt $\overline{AC}$ im Verhältnis 3 : 1.
S halbiert $\overline{BD}$ (Verhältnis 1 : 1).

Geschlossener Vektorzug:

(1) $\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

(2) $\begin{cases} \overrightarrow{SC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC},\ 0 < \alpha < 1 \\ \overrightarrow{BS} = \beta \cdot \overrightarrow{BD},\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \beta \cdot \overrightarrow{BD} + \alpha \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 0$

(3) $\beta\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

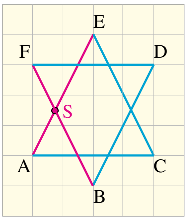
(4) $\begin{cases} \text{I} & -\beta + 2\alpha = 0 \\ \text{II} & 3\beta + 2\alpha - 2 = 0 \end{cases}$

aus I: $\beta = 2\alpha$
in II: $6\alpha + 2\alpha - 2 = 0$
$8\alpha = 2$
$\alpha = \frac{1}{4}$
in I: $\beta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \overline{AS} : \overline{SE} = (1-\alpha) : \alpha = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 1$

$\overline{BS} : \overline{SD} = \beta : (1-\beta) = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1 : 1$

Übung 43 Stern
In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt S die beiden Kanten AE und BF des rechts dargestellten Sternes?
Verwenden Sie Spaltenvektoren.



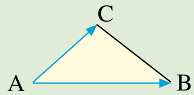
J. Nachweis von geometrischen Figuren

Im Folgenden zeigen wir, wie man überprüft, ob gegebene Punkte ein Dreieck bzw. ein Trapez, ein Parallelogramm oder ein Rechteck bilden.

Beispiel: Dreiecksnachweis
Zeigen Sie, dass die Punkte A (2|4|4), B (4|10|5) und C (3|6|8) ein echtes Dreieck bilden, d. h., dass A, B und C nicht auf einer Linie liegen.

Lösung:
Die Abbildung rechts zeigt, dass ein echtes Dreieck vorliegt, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ nicht kollinear sind.
Die Berechnung von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ ergibt zwei offensichtlich nicht kollineare Vektoren. ABC ist also ein echtes Dreieck.

Dreieck



$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind nicht kollinear.

Kollinearitätsprüfung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

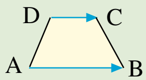
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sind nicht kollinear.

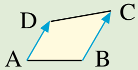
Beispiel: Trapeznachweis
Zeigen Sie, dass die Punkte A (2|4|4), B (4|8|6), C (2|7|7) und D (1|5|6) ein Trapez bilden, also ein Viereck mit zwei parallelen Seiten.

Lösung:
Ein Viereck ist ein Trapez, wenn zwei gegenüberliegende Seitenvektoren kollinear sind. Es gibt, wie die Abbildung zeigt, zwei Möglichkeiten, die man austesten muss.
Hier ist $\overrightarrow{DC} = 0{,}5\ \overrightarrow{AB}$, also ist es ein Trapez.

Trapez*



$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sind kollinear.



$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sind kollinear.

Kollinearitätsprüfung:

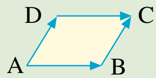
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{DC} = 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ kollinear
$\Rightarrow$ ABCD ist ein Trapez.

Beispiel: Parallelogrammnachweis
Zeigen Sie, dass die Punkte A (2|5|3), B (4|6|2), C (6|11|3) und D (4|10|4) ein Parallelogramm bilden, d. h., dass jeweils gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Lösung:
Ein Parallelogramm liegt vor, wenn zwei gegenüberliegende Seitenvektoren gleich sind. Da hier z. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gilt, handelt es sich tatsächlich um ein Parallelogramm.

Parallelogramm*



$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sind gleich.

Nachweis der Gleichheit von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

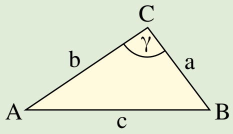
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$ Es ist ein Parallelogramm.

* Es sei vorausgesetzt, dass $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ nicht kollinear sind, damit A, B, C und D ein Viereck bilden.

Beispiel: Rechtwinkligkeitsnachweis
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC mit den Ecken A(0|3|1), B(0|0|4) und C(2|2|2) bei C einen rechten Winkel besitzt.
Verwenden Sie die Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

Lösung:
Die Umkehrung des Satzes von Pythagoras besagt: Gilt für die Seiten a, b und c eines Dreiecks die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig bei C.
Wir berechnen also die Seitenlängen des Dreiecks, indem wir die Beträge der Seitenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bestimmen, und überprüfen die Pythagorasbedingung. Da diese erfüllt ist, ist das Dreieck rechtwinklig bei C.

Rechtwinkligkeit



$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \gamma = 90°$

Rechtwinkligkeitsprüfung

$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{12}$

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = |\vec{b}| = \sqrt{6}$

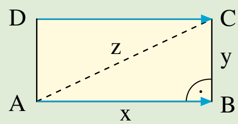
$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = |\vec{c}| = \sqrt{18}$

$a^2 + b^2 = 12 + 6 = 18$
$c^2 = 18$ $\Rightarrow$ ABC ist rechtwinklig.

Beispiel: Nachweis eines Rechtecks
Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Ecken A(4|0|2), B(6|6|3), C(0|7|9) und D(−2|1|8). Zeigen Sie, dass es sich bei diesem Viereck um ein ein Rechteck handelt.

Lösung:
Ein Rechteck liegt vor, wenn zwei gegenüberliegende Seitenvektoren gleich sind und außerdem in einer Ecke ein rechter Winkel nachgewiesen werden kann.
Im gegebenen Viereck gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und außerdem ist z. B. bei B ein rechter Winkel, also ist es ein Rechteck.

Rechteck



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und rechtwinklig in einer Ecke

Rechtecksnachweis:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{41}, \ y = |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{73}$

$z = |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{114}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow$ Rechter Winkel bei B

Übung 44 Dreieckseigenschaften
Zeigen Sie zunächst, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.
Zeigen Sie dann, dass das Dreieck ABC die angegebene Eigenschaft besitzt.

a) A(0|0|0), B(7|1|0), C(4|−3|5)
gleichseitig

b) A(1|3|2), B(3|−1|6), C(5|1|−2)
gleichschenklig

c) A(1|3|2), B(3|5|3), C(2|4|−2)
rechtwinklig

d) A(1|2|3), B(1|2|8), C(4|6|3)
gleichschenklig und rechtwinklig

Übung 45 Viereckseigenschaften
Untersuchen Sie, ob ein Quadrat, Rechteck, Parallelogramm oder Trapez vorliegt.

a) A(2|1|0), B(4|3|1), C(5|1|3), D(3|−1|2)

b) A(2|0|4), B(3|1|6), C(3|2|0), D(2|1|−2)

c) A(2|2|1), B(4|1|2), C(5|3|2), D(3|4|1)

d) A(1|1|0), B(5|3|−2), C(6|5|1), D(4|4|2)

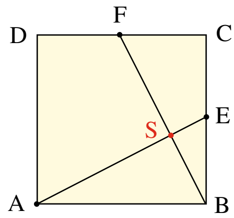
Übungen

46. Der Punkt T teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis v. Bestimmen Sie den Punkt B.

a) A(1|4), T(5|8), v = 2 : 1
b) A(8|5), T(17|−4), v = 3 : 2
c) A(1|4|7), T(9|16|−1), v = 2 : 3
d) A(1|5|12), T(7|2|0), v = 3 : 1

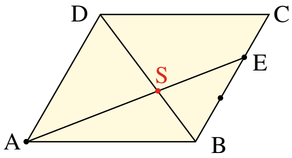
47. Teilverhältnis im Quadrat

Im abgebildeten Quadrat ABCD halbiert E die Seite $\overline{BC}$ und F die Seite $\overline{DC}$. In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt S der Transversalen $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ die Strecke $\overline{AE}$?



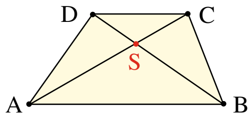
48. Teilverhältnis im Parallelogramm

Im Parallelogramm ABCD teilt der Punkt E die Seite $\overline{BC}$ im Verhältnis 2 : 1. In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt S der Diagonalen $\overline{DB}$ und der Transversalen $\overline{AE}$ die Strecke $\overline{AE}$ bzw. die Strecke $\overline{DB}$?



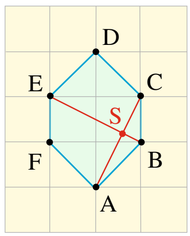
49. Teilverhältnis im Trapez

Im abgebildeten Trapez ABCD ist die Seite $\overline{DC}$ halb so lang wie die Seite $\overline{AB}$. S sei der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.
In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Diagonale $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$?



50. Sechseck

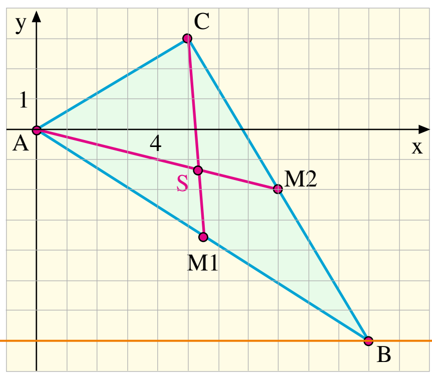
Im abgebildeten Sechseck kreuzen sich die beiden Transversalen $\overline{AC}$ und $\overline{BE}$. S sei der Schnittpunkt dieser Transversalen. In welchen Verhältnissen teilt S die Transversalen?
Hinweis: Stellen Sie alle benötigten Vektoren als zweidimensionale Spaltenvektoren dar.



51. Dreieck

Im abgebildeten Dreieck sind M_1 und M_2 die Seitenmitten von $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$.

a) Wie lauten die Koordinaten von M_1 und M_2?
b) In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Transversalen $\overline{AM_2}$ und $\overline{CM_1}$?
c) Wo liegt der Punkt S?
Hinweis: Stellen Sie alle benötigten Vektoren als Spaltenvektoren dar.



Übungen

Die folgenden Übungen können ohne Hilfsmittel gelöst werden, soweit nichts anderes angegeben ist.

1. Pyramide

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide ABCDS gegeben. Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche ist 4, die Höhe der Pyramide ist 3.

a) Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

b) Skizzieren Sie ein Schrägbild der Pyramide im Koordinatensystem.

c) Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

2. Betrag eines Vektors

a) Untersuchen Sie, welcher der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ oder $\vec{c}$ den längeren Pfeil hat.

b) Bestimmen Sie die fehlende Koordinate x so, dass der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ die Länge 15 hat.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 11 \end{pmatrix}$$

3. Dreieck

In einem Koordinatensystem sind die Punkte A (1|2|3), B (2|7|6) und C (−3|2|2) gegeben.

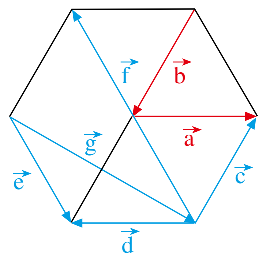
a) Weisen Sie nach, dass A, B und C die Eckpunkte eines Dreiecks sind.

b) Überprüfen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig oder rechtwinklig ist.

c) Ergänzen Sie ABC durch Hinzunahme eines Punktes D zum Parallelogramm ABCD.

4. Sechseck

Im abgebildeten Sechseck sollen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verwendet werden, um weitere Vektoren als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darzustellen. Stellen Sie so die Vektoren $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ und g mit Hilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.



5. Linear abhängig oder linear unabhängig

Prüfen Sie, ob die angegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

6. Parallelogramm

Gegeben sind die Punkte A(4|3|0), B(6|6|6), C(2|3|6) und D(0|0|0) eines Vierecks ABCD.

a) Weisen Sie nach: Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm, aber kein Rechteck.

b) Skizzieren Sie das Viereck im Koordinatensystem.

c) Geben Sie den Mittelpunkt M der Diagonalen $\overline{AC}$ an.
Welche Länge hat die Diagonale?

7. Pyramide

Gegeben ist eine Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S.
Die Koordinaten der Punkte lauten A(6|6|2), B(2|9|2), C(3|2|2) und S(4|4|6).

a) Zeigen Sie: Das Grundflächendreieck ABC ist gleichschenklig und bei A rechtwinklig.

b) Beschreiben Sie, welche spezielle Lage die Pyramide im Koordinatensystem hat.
Fertigen Sie eine Skizze an.

c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

8. Quader

Ein Quader ABCDEFGH hat die Eckpunkte A(6|3|−1), B(5|5|1), C(9|3|5), D(10|1|3), E(4|1|0) und F(3|3|2). $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ seien drei aufeinander senkrecht stehende Vektoren des Quaders.

a) Skizzieren Sie den Quader im Koordinatensystem.
Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte G und H.

b) Zeigen Sie, dass der Körper tatsächlich ein Quader ist. (Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ stehen rechtwinklig aufeinander und beschreiben alle Kanten des Quaders.)

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Grundfläche ABCD.

d) T sei der Mittelpunkt des Quaders. Geben Sie den Vektor $\overrightarrow{AT}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an. Ermitteln Sie die Koordinaten von T.

9. Kollinearität und Komplanarität

a) Welche dieser Vektoren sind kollinear?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

b) Wählen Sie den Parameter a so, dass die gegebenen Vektoren komplanar sind.

$$I.\ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \qquad II.\ \begin{pmatrix} a \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad III.\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$$

10. Teilverhältnis

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Ecken A(0|0|0), B(8|−2|−2) und C(10|8|2).

a) Bestimmen Sie die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$.

b) Zeigen Sie, dass sich die Seitenhalbierenden $\overline{CM_1}$ und $\overline{AM_2}$ wie 2 : 1 schneiden.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden $\overline{CM_1}$ und $\overline{AM_2}$.

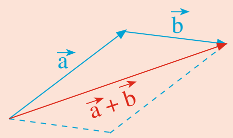
Überblick

Der Abstand von zwei Punkten

Ebene: Die Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$ haben den Abstand
$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.
Raum: Die Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ haben den Abstand
$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

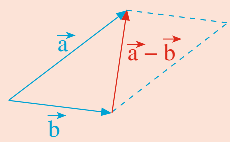
Summe zweier Vektoren (Addition)

Um die Summe zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu bilden, legt man die Vektoren wie abgebildet aneinander.
Der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ führt vom Pfeilanfang von $\vec{a}$ zum Pfeilende von $\vec{b}$.



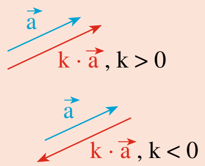
Differenz zweier Vektoren (Subtraktion)

Um die Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu bilden, legt man die Pfeile wie abgebildet aneinander.
Der Differenzvektor $\vec{a} - \vec{b}$ führt vom Pfeilende von $\vec{b}$ zum Pfeilende von $\vec{a}$.



Skalarmultiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Der Vektor $\vec{a}$ wird mit der Zahl k multipliziert, indem seine Länge mit dem Faktor $|k|$ multipliziert wird. Die Richtung von $\vec{a}$ bleibt erhalten, wenn $k > 0$ gilt. Sie kehrt sich um, wenn $k < 0$ gilt.

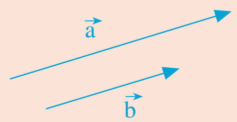


Linearkombination von Vektoren

Die Summe $r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots r_n\vec{a}_n$ wird als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ bezeichnet.

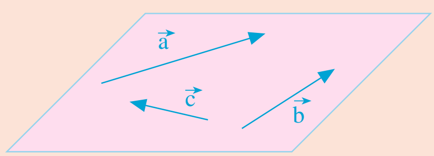
Kollineare Vektoren

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen kollinear, wenn einer der beiden Vektoren ein Vielfaches des anderen Vektors ist:
$\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ oder $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$.
Kollineare Vektoren sind parallel.



Komplanare Vektoren

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heißen komplanar, wenn einer der drei Vektoren als Linearkombination der beiden anderen Vektoren dargestellt werden kann:
$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ oder $\vec{b} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{c}$ oder $\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$
Komplanare Vektoren liegen in einer Ebene.



Kriterium zur linearen Abhängigkeit

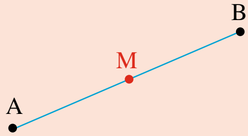
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann linear abhängig, wenn es drei reelle Zahlen r, s und t (mit $(r|s|t) \neq (0|0|0)$) gibt, sodass gilt: $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$.

Kriterium zur linearen Unabhängigkeit

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $r = s = t = 0$ hat.

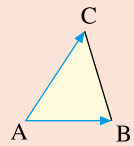
Mittelpunkt einer Strecke

Die Strecke $\overline{AB}$ mit den Endpunkten $A\,(a_1|a_2|a_3)$ und $B\,(b_1|b_2|b_3)$ hat den Mittelpunkt M mit den Koordinaten
$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}\middle|\frac{a_2+b_2}{2}\middle|\frac{a_3+b_3}{2}\right)$.



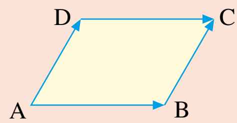
Dreiecksnachweis

Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck, wenn $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ nicht kollinear sind.



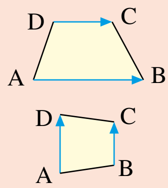
Parallelogrammnachweis

Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm, wenn gilt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ oder $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



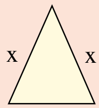
Trapeznachweis

Das Viereck ABCD ist ein Trapez, wenn zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, d. h. wenn gilt:
$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{DC}$ oder $\overrightarrow{AD} = \beta \cdot \overrightarrow{BC}$
($\alpha > 0$ bzw. $\beta > 0$)



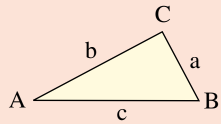
Gleichschenkligkeitsnachweis

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn mindestens zwei seiner Seiten die gleiche Länge haben.



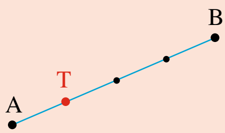
Rechtwinkligkeitsnachweis

Das Dreieck mit den Seiten a, b und c ist rechtwinklig bei C, wenn $c^2 = a^2 + b^2$ gilt (Umkehrung des Satzes von Pythagoras).



Teilverhältnis einer Strecke

Der Punkt T liege auf der Strecke $\overline{AB}$. Gilt $\overrightarrow{AT} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, so teilt der Punkt T die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $\alpha : (1 - \alpha)$.



CAS-Anwendung

Die Notation weicht bei der Vektorrechnung teilweise von derjenigen ab, die beim Aufschreiben zu verwenden ist. Es ist sinnvoll, mit dem ersten Buchstaben eines Namens die Art des Objektes anzugeben, also p für einen Punkt, v für einen Vektor usw. Mehrere Eingaben können in einer Zeile durch einen Doppelpunkt getrennt werden; gerade bei Vektoren ist das übersichtlicher.

Möglichkeiten zur Eingabe von Vektoren:

1. Die Koordinaten werden in eckigen Klammern in mehreren Zeilen eingetragen. Dazu wird nach der linken Klammer und ersten Koordinate mit der Taste $\boxed{\hookleftarrow}$ rechts unten auf der Nspire-Tastatur eine weitere Zeile erzeugt. In die neue Zeile gelangt man mit dem Cursor.

2. Im Katalog bei 5 die Vorlage für eine Matrix auswählen und den Vektor als Matrix mit der Zeilenzahl 3 und Spaltenzahl 1 vorgeben.

3. Den Vektor als Zeilenvektor eingeben, dann mit $\boxed{\text{menu}}$ Matrix und Vektor ▶ Transponieren in einen Spaltenvektor umwandeln.

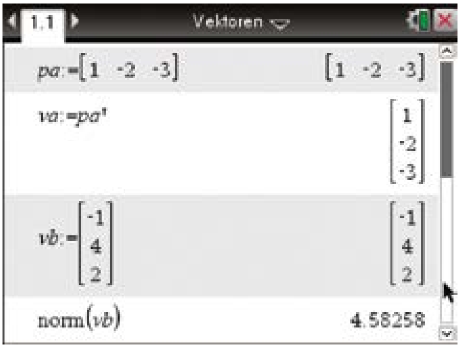
Beispiel: Eingabe von Vektoren und einfache Operationen

Gegeben sind die Punkte A (1|−2|−3) und B (−1|4|2).

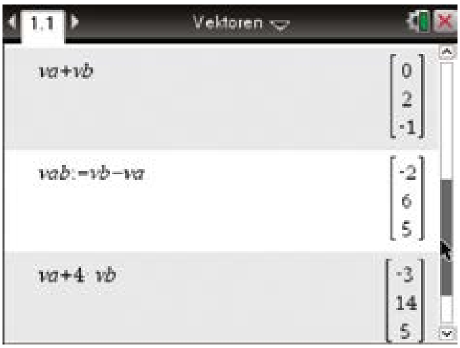
a) Definieren Sie im CAS den Punkt A unter dem Namen pa und die Ortsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ unter den Namen va und vb.
Bestimmen Sie die Länge des Ortsvektors $\vec{b}$ mithilfe der Funktion norm.

b) Bilden Sie die Summe $\vec{a} + \vec{b}$, die Differenz $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ und die Linearkombination $\vec{a} + 4\vec{b}$.

Lösung zu a:
Punkte werden als Zeile, Vektoren als Spalte in eckigen Klammern geschrieben. Bei der Eingabe werden die Werte durch Kommata getrennt, in der Anzeige erscheinen stattdessen größere Zwischenräume. Durch Transponieren (Zeile wird zur Spalte) erhält man den zum Punkt gehörigen Ortsvektor. Mit der Eingabe norm(vb) erfolgt die Berechnung von $\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2}$ mit dem Ergebnis $\sqrt{21}$.



Lösung zu b:
Für die Vektoraddition wird die übliche Taste $\boxed{+}$ verwendet.
Der Verbindungsvektor vom Punkt A zum Punkt B wird sinnvollerweise mit vab bezeichnet und durch die Eingabe vb $\boxed{-}$ va berechnet.
Die Skalar-Multiplikation (Vielfaches des Vektors) erfolgt mit der Taste $\boxed{\times}$.



Übung 1

Geben Sie den Punkt C(3|−1|2) und den Ortsvektor zum Punkt D(−2|0|1) ein. Bestimmen Sie den Ortsvektor $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ und den Verbindungsvektor $\overrightarrow{CD}$ und vergleichen Sie die Beträge.

Beispiel: Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

a) Gegeben sind die Punkte A(1|−2|−3), B(−1|4|2), C(3|−1|2) und D(−2|0|1). Überprüfen Sie, ob die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{CD}$ linear unabhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass sich jeder Punkt des $\mathbb{R}^3$ mithilfe dieser drei Vektoren darstellen lsst.

Lösung zu a):
Zunächst werden die Ortsvektoren unter den Namen va, vb, vc, vd eingegeben, dann bildet man vab, vad und vcd. Der Nullvektor wird als v0 gespeichert. Anschließend löst man die lineare Gleichung

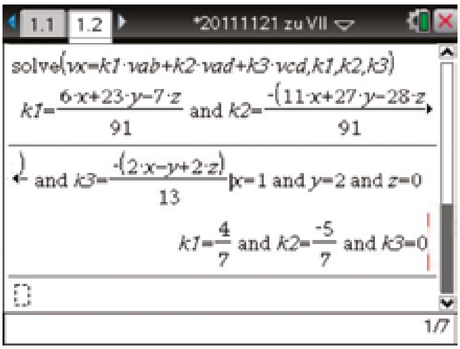
k1 · vab + k2 · vad + k3 · vcd = v0

mithilfe des solve-Befehls und erhält mögliche Einsetzungen für k1, k2, k3. Die drei Vektoren sind linear unabhängig, da k1 = k2 = k3 = 0 die einzige Lösung ist.

Lösung zu b):
Ein beliebiger Vektor des $\mathbb{R}^3$ wird als vx mit den Koordinaten x, y und z gespeichert. Dann löst man die lineare Gleichung

vx = k1 · vab + k2 · vad + k3 · vcd

nach k1, k2 und k3. Setzt man anschließend für x, y und z beliebige Werte ein, so ergeben sich eindeutig die Werte für k1, k2 und k3. Damit kann man jeden Vektor des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination der drei gegebenen Vektoren schreiben.



Hinweis: Parameter wie a und b sind ggf. aufzunehmen, also z. B.: solve(…,{k1,k2,k3,a,b}).

Übung 2

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1-a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ a-6 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

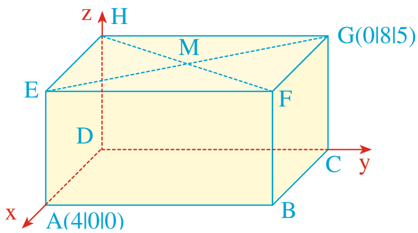
Übung 3

Welche Bedingungen müssen die reellen Zahlen a und b erfüllen, damit die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind?

Test

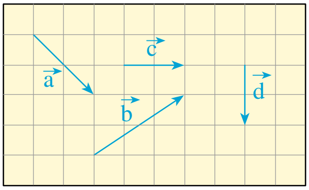
Vektoren

1. Gegeben ist der Quader ABCDEFGH.
a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B, C, D, E, F, H und M.
b) Bestimmen Sie die Länge der Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{DM}$.
c) Begründen Sie: Die Vektoren $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{EM}$ und $\overrightarrow{AM}$ sind linear unabhängig.



2. Ermitteln Sie, in welchem Verhältnis der Punkt T (1|8|5) die Strecke $\overline{AB}$ mit den Endpunkten A (3|4|3) und B (−2|14|8) teilt.

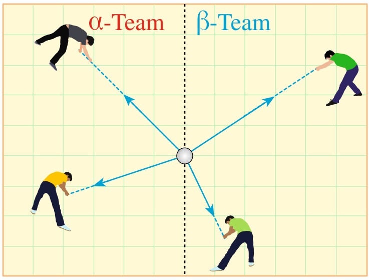
3. Stellen Sie die abgebildeten Vektoren als Spaltenvektoren in Koordinatenform dar. Bestimmen Sie anschließend das Ergebnis der folgenden Rechenausdrücke.
a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$
b) $\frac{1}{2}\vec{a} - 2(\vec{b} - 2\vec{d})$
c) $\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c} + \vec{d}$



4. a) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dar.
b) Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ komplanar sind.

5. Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (6|7|9), B (4|4|3) und C (2|10|6).
a) Zeigen Sie, dass das Dreieck gleichschenklig ist. Ist es sogar gleichseitig?
b) Fertigen Sie ein Schrägbild des Dreiecks an.
c) Gesucht ist ein weiterer Punkt D, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

6. Auf der schwarzen Linie liegt eine Eisenkugel, an der vier Zugseile befestigt sind. Anton und Alfons bilden das α- Team, Benno und Bruno das β-Team. Gewonnen hat dasjenige Team, welches die Kugel über die Linie zieht. Die Zugkräfte sind maßstäblich eingezeichnet. Welches Team wird gewinnen?



Lösungen: S. ■■■

Bildnachweis

Illustrationen
Cornelsen/Anton Bigalke, Wald-Michelbach
Cornelsen/Detlev Schüler
Cornelsen/Gerlinde Keller
Cornelsen/Gudrun Lenz
Cornelsen/Klein und Halm, Grafikdesign Berlin
Cornelsen/Norbert Köhler

Screenshots
Cornelsen/Felix Arndt/© Texas Instruments. Nutzung mit Genehmigung von Texas Instruments

Abbildungen

Cover/bpk/Stiftung Preussische Schlösser und Gärten Berlin-Brandenburg/Leo Seidel;

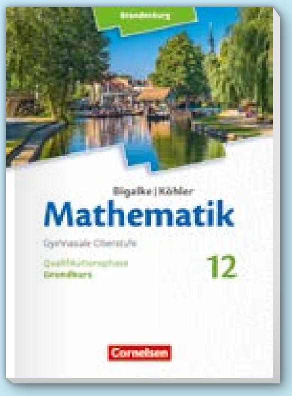
2/PEFC Deutschland e.V.; **15/**Shutterstock.com/ArTono; **26/o./**Cornelsen/Henning Knoff; **26/Mi./**Shutterstock.com/StockVector; **49/u.l./**Shutterstock.com/Hennadii H; **49/u. r./**Shutterstock.com/LynxVector; **50/o./**Shutterstock.com/Yuri Schmidt; **50/Mi. l./**Shutterstock.com/Axel Wolf; **50/Mi. r./**Shutterstock.com/HappyPictures; **50/u./**Shutterstock.com/Tim Carillet; **52/Bäume/**Shutterstock.com/Cat_arch_angel; **64/Figuren/**Shutterstock.com/Darq; **65/**stock.adobe.com/Peter Probst/meseberg; **77/**stock.adobe.com/Michael Rosskothen; **87/**Shutterstock.com/Ryszard Filipowicz; **89/**akg-images; **106/A/**stock.adobe.com/tai111; **106/B/**Shutterstock.com/lexaarts; **106/T/**stock.adobe.com/chagpg; **106/Turm/**Shutterstock.com/Rvector; **107/**Cornelsen/Norbert Köhler, Stahnsdorf; **116/**Shutterstock.com/Vector_dream_team; **118/Flugzeug** Shutterstock.com/Elartico; **119/B/**Shutterstock.com/Markus Gann; **119/C/**Shutterstock.com/Rvector; **119/F/**Shutterstock.com/Mountain Brothers; **121/**Shutterstock.com/southmind; **124/Helikopter/**stock.adobe.com/Archmotion.net; **124/Hintergrund/**stock.adobe.com/Oceloti; **124/Flugzeug/**stock.adobe.com/Oleksandr Rozhkov; **125/Ballon/**stock.adobe.com/junzportraits; **125/Drohne/**stock.adobe.com/nsit0108; **125/Insel/**stock.adobe.com/Robert Kneschke; **125/Schiff/**stock.adobe.com/sudowoodo; **125/U-Boot/**stock.adobe.com/Zefir; **125/Wüste/**stock.adobe.com/ActiveLines; **129/Flugzeug/**Shutterstock.com/fckncg; **129/Helikopter/**stock.adobe.com/tai111; **129/Turm/**Shutterstock.com/Rvector

Die Ausgaben im Überblick für Brandenburg

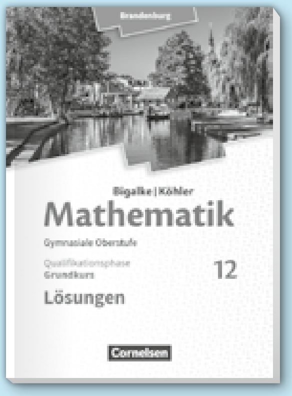
Neue Materialien für die 12. Klasse

Passgenau zum Lehrplan

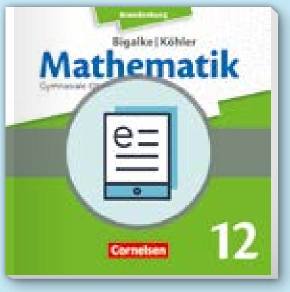
NEU **Bigalke/Köhler: Mathematik**
Ausgabe Brandenburg
12. Schuljahr, Grundkurs



Schülerbuch Grundkurs
Kartoniert
978-3-06-040667-8 25,99

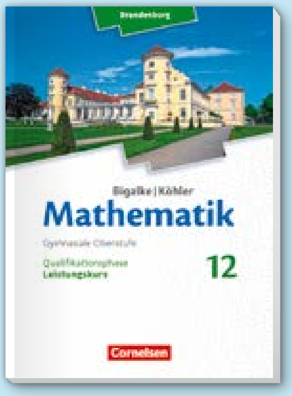


Lösungen zum Schülerbuch
Kartoniert
978-3-06-040671-5 19,99

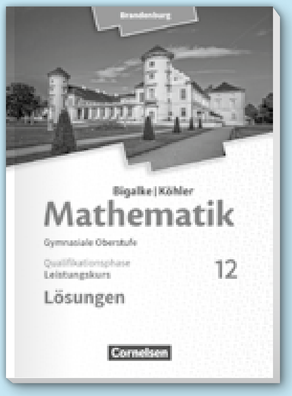


Schülerbuch – E-Book
Einzellizenz/1 Jahr/scook.de
978-3-06-040972-3 8,99

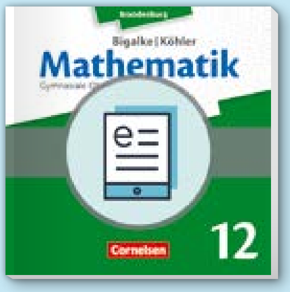
NEU **Bigalke/Köhler: Mathematik**
Ausgabe Brandenburg
12. Schuljahr, Leistungskurs



Schülerbuch Leistungskurs
Kartoniert (Aug 2020)
978-3-06-040669-2 ◕ 26,99



Lösungen zum Schülerbuch
Kartoniert (Sept. 2020)
978-3-06-040673-9 19,99



Schülerbuch – E-Book
Einzellizenz/1 Jahr/scook.de (Aug. 2020)
978-3-06-040974-7 ○ 8,99

Service Center
Telefon: 0800 12 120 20 (kostenlos aus dem dt. Festnetz)
+49 30 897 85-640 (Mobilfunknetz / Ausland)
Mo – Fr 8 – 18 Uhr (außerhalb dieser Zeit erreichen Sie unsere automatische Bestellannahme)
Fax: +49 30 897 85-578
E-Mail: service@cornelsen.de

Cornelsen Verlag
14328 Berlin
cornelsen.de

Preisangaben in € (D), Stand 1. 01. 2020. Preisänderung und Irrtum vorbehalten. Alle Preise enthalten die zzt. geltende Mehrwertsteuer.

P9702672 VBD 0720