Brandenburg

Bigalke | Köhler

Mathematik

Gymnasiale Oberstufe

Qualifikationsphase
Leistungskurs

12

Teildruck
2. Kapitel: Das Skalarprodukt

Cornelsen

Bigalke | Köhler

Mathematik

Redaktion: Dr. Ulf Rothkirch
Layout: Klein und Halm Grafikdesign, Berlin
Bildrecherche: Kai Mehnert

Grafik: Dr. Anton Bigalke, Waldmichelbach
Illustration: Detlev Schüler †, Berlin (66-1, 75-1, 75-2);
Cornelsen/Henning Knoff (26-1);
Dr. Norbert Köhler, Stahnsdorf (107-1, 107-2, 107-3);
Dr. Anton Bigalke, Waldmichelbach (alle weiteren)
Umschlaggestaltung: Klein und Halm Grafikdesign,
Hans Herschelmann, Berlin
Technische Umsetzung: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg

Bilder aus dem Land Brandenburg
Umschlag: Schloss Rheinsberg
Seite 15: Angermünde, Rathaus
Seite 65: Dahme/Mark
Seite 87: Beelitz-Heilstätten, Baumkronenpfad

www.cornelsen.de

Dieses Werk enthält Vorschläge und Anleitungen für Untersuchungen und Experimente.
Vor jedem Experiment sind mögliche Gefahrenquellen zu besprechen.
Beim Experimentieren sind die Richtlinien zur Sicherheit im Unterricht einzuhalten.

Die Webseiten Dritter, deren Internetadressen in diesem Lehrwerk angegeben sind, wurden vor Drucklegung sorgfältig geprüft. Der Verlag übernimmt keine Gewähr für die Aktualität und den Inhalt dieser Seiten oder solcher, die mit ihnen verlinkt sind.

1. Auflage, 1. Druck 2020

Alle Drucke dieser Auflage sind inhaltlich unverändert
und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

ISBN 978-3-06-040669-2 (Schülerbuch)
ISBN 978-3-06-040974-7 (E-Book)

PEFC
PEFC/04-32-0928

PEFC zertifiziert
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.

www.pefc.de

Inhalt

- Wiederholung
- Basis
- Basis/Erweiterung
- Vertiefung

IX. Hypothesentests

X. Grundstrategien in der Oberstufe

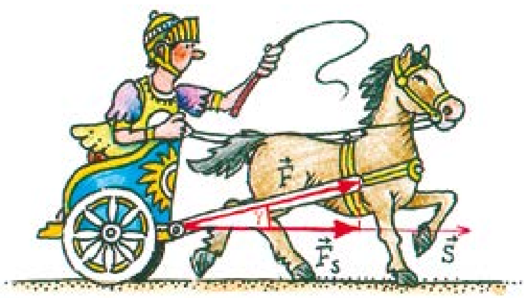
XI. Aufgaben zur Abiturvorbereitung

II. Das Skalarprodukt

1. Die Definition des Skalarproduktes

A. Definition des Skalarproduktes

Ein Wagen wird gleichmäßig von einem Pferd über einen Sandweg gezogen. Dabei wird eine Kraft in Richtung der Deichsel aufgebracht, die sich durch den Kraftvektor $\vec{F}$ darstellen lässt.
Der zurückgelegte Weg lässt sich ebenfalls vektoriell durch den Wegvektor $\vec{s}$ darstellen. Beide seien im Winkel γ gegeneinander geneigt.



Die hierbei verrichtete Arbeit W errechnet sich als Produkt aus Kraft und Weg, genauer gesagt als Produkt aus Kraft in Wegrichtung F_s und Weglänge s.
F_s lässt sich im rechtwinkligen Dreieck mit Hilfe des Kosinus darstellen als $|\vec{F}| \cdot \cos\gamma$, und s lässt sich darstellen als Betrag des Vektors $\vec{s}$, d.h. als $|\vec{s}|$. Dies führt auf die Formel $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\gamma$, deren rechte Seite eine gewisse Art von Produkt der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ darstellt.

„Arbeit = Kraft · Weg“

$$\text{Arbeit} = \underset{\text{Wegrichtung}}{\text{Kraft in}} \cdot \text{Weglänge}$$

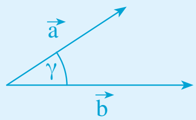
$$W = F_s \cdot s$$

$$W = |\vec{F}| \cdot \cos\gamma \cdot |\vec{s}|$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\gamma$$

Das Ergebnis dieses Produktes ist die Arbeit W, die kein Vektor, sondern eine reine Zahlengröße ist. In der Physik bezeichnet man eine Zahlengröße auch als Skalar und deshalb nennt man das Produkt $|\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\gamma$ auch ***Skalarprodukt*** der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$. Man verwendet für den Term $|\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\gamma$ die symbolische Produktschreibweise $\vec{F} \cdot \vec{s}$.

Das Skalarprodukt (Kosinusform)



$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien zwei Vektoren und γ der Winkel zwischen diesen Vektoren ($0° \le \gamma \le 180°$).
Dann bezeichnet man den Ausdruck

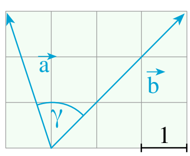
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$$

als ***Skalarprodukt*** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

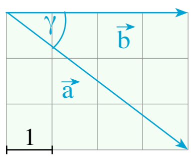
Übung 1 Skalarprodukt

Bestimmen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Messen Sie die benötigten Längen und Winkel aus.

a)



b)

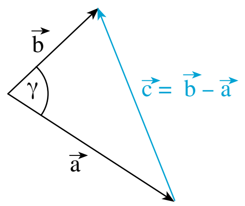


c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ziel der folgenden Überlegungen ist die Gewinnung einer vektor- und winkelfreien Darstellung des Skalarproduktes von Spaltenvektoren.

Wir betrachten zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die ein Dreieck aufspannen, wie abgebildet. In einem allgemeinen Dreieck gilt der Kosinussatz der Trigonometrie, von dem unsere Rechnung ausgeht:



$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$	Kosinussatz
$\lvert\vec{c}\rvert^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2 - 2 \cdot \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\gamma$	
$\lvert\vec{c}\rvert^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$	Def. des Skalarproduktes
$2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert^2 + \lvert\vec{b}\rvert^2 - \lvert\vec{c}\rvert^2$	Umformung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{c}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

Durch Einsetzen der rechts aufgeführten Darstellungen für die Beträge der Spaltenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ folgt:

$$2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2$$

$$2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 2\,a_1 b_1 + 2\,a_2 b_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Analog ergibt sich für dreidimensionale Spaltenvektoren die Formel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Das Skalarprodukt von Spaltenvektoren lässt sich also als Produktsumme von Koordinaten darstellen.

Das Skalarprodukt (Koordinatenform)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) = 4$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) = 0$$

Übung 2 Koordinatenform

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Für welchen Wert von u ist das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich null?
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2u \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -u \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

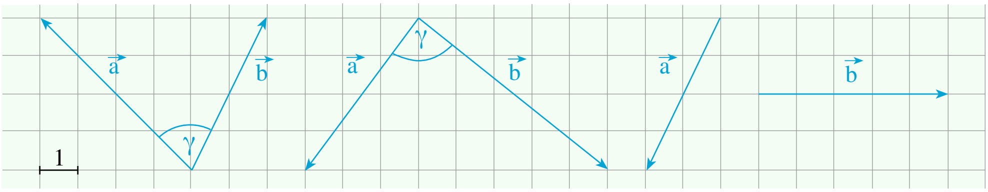
Im Folgenden werden wir sehen, dass viele Probleme durch Anwendung des Skalarproduktes vereinfacht gelöst werden können. Oft benötigt man dabei beide Darstellungen des Skalarproduktes, die winkelbezogene Form $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ sowie die koordinatenbezogenen Formen $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ bzw. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Übungen

3. Berechnen Sie in den abgebildeten Figuren das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

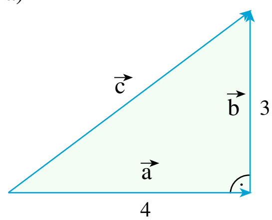
a) Verwenden Sie die Kosinusform des Skalarproduktes. Die benötigten Längen und Winkel können mit dem Geodreieck gemessen werden.

b) Verwenden Sie die Koordinatenform des Skalarproduktes.



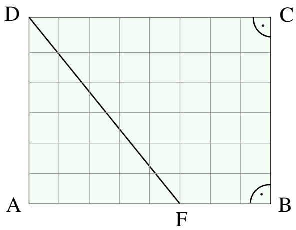
4. Berechnen Sie die angegebenen Skalarprodukte.

a)



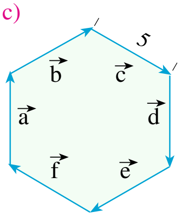
$\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$

b)



$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FD}$,
$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF}$

c)



$\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{d}$,
$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$,
$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{d} + \vec{e} + \vec{f})$

5. Errechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

a) $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3a \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

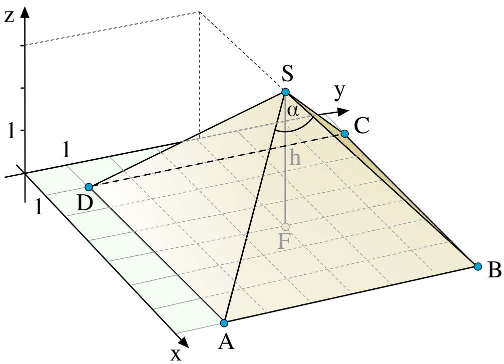
6. Wie muss a gewählt werden, wenn die folgenden Gleichungen gelten sollen?

a) $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = 0$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = 1$ c) $\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \right) = 6$

7. Die Abbildung zeigt eine gerade quadratische Pyramide mit den Seitenlängen $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{BC}| = 6$ sowie der Höhe $h = 3$.

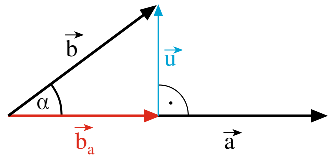
a) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS}$.

b) Errechnen Sie das Skalarprodukt $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$. Errechnen Sie die Längen $|\overrightarrow{SA}|$ und $|\overrightarrow{SB}|$. Können Sie nun den Winkel $\alpha = \measuredangle ASB$ bestimmen?



B. Skalarprodukt und orthogonale Projektion

Projiziert man den Vektor $\vec{b}$ orthogonal, d. h. senkrecht auf einen zweiten Vektor $\vec{a}$, so entsteht als Projektionsbild ein Vektor $\vec{b}_a$, der kollinear (parallel) zum Vektor $\vec{a}$ verläuft.



Berechnen wir nun das Skalarprodukt von $\vec{a} \cdot \vec{b}$, wobei wir $\vec{b}$ durch die Komponentensumme $\vec{b}_a + \vec{u}$ ersetzen (s. Abb.), so erhalten wir nach nebenstehender Rechnung die Formel (1): $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a$.

Berechnung des Skalarprodukts $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{b}_a + \vec{u}) = \vec{a} \cdot \vec{b}_a + \vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a$

denn $\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 90° = 0$

Diese Formel macht eine interessante anschauliche Aussage über das Skalarprodukt. Sie besagt nämlich, dass zum Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ nur die Komponente $\vec{b}_a$ in Richtung von $\vec{a}$ beiträgt, nicht aber die Komponente $\vec{u}$ senkrecht zu $\vec{a}$.

Skalarprodukt
und orthogonale Projektion

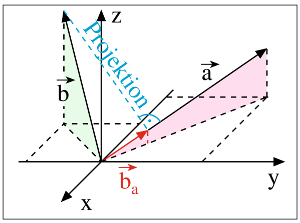
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a.$$

Als nächstes stellt sich die Frage, wie man den Vektor $\vec{b}_a$ berechnen kann.
Dazu verwendet man den Ansatz $\vec{b}_a = r \cdot \vec{a}$ $(r \in \mathbb{R})$, denn $\vec{b}_a$ ist kollinear zu $\vec{a}$.

Beispiel: Bestimmung der orthogonalen Projektion $\vec{b}_a$

Berechnen Sie die orthogonale Projektion $\vec{b}_a$ des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung:
Wir setzen den Ansatz $\vec{b}_a = r \cdot \vec{a}$ in Gleichung (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a$ ein, führen die Rechnung rechts durch und erhalten $\vec{b}_a$.
Im Bild unten ist die Projektion skizziert.



Berechnung von $\vec{b}_a$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a$$
$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot r\vec{a}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8r \\ 8r \\ 4r \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow 36 = 144r$$
$$\Rightarrow r = \tfrac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \vec{b}_a = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übung 8 Orthogonale Projektion
Berechnen Sie die orthogonale Projektion $\vec{b}_a$ von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und fertigen Sie eine Skizze an.

a) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$
b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$
c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Winkel- und Flächenberechnungen

A. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Mit Hilfe des Skalarproduktes zweier Vektoren können sowohl ***Längen*** als auch ***Winkel*** auf vektorieller Basis gemessen werden. Die Grundlage bilden hierbei die beiden folgenden Sätze.

Bildet man das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst, so erhält man das Quadrat des Betrages des Vektors:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = |\vec{a}|^2.$$

Der Betrag eines Vektors

Für den Betrag (die Länge) eines Vektors $\vec{a}$ gilt die Formel

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \text{ bzw. } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Beispielsweise hat der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ die Länge 7, denn es gilt:

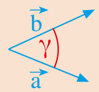
$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 + 36 + 9 = 49 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{49} = 7.$$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden stets zwei Winkel. Der kleinere der beiden Winkel wird als ***Winkel zwischen den Vektoren*** bezeichnet. Er kann mittels Skalarprodukt berechnet werden. Löst man die Skalarproduktgleichung $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ nach $\cos\gamma$ auf, so erhält man die sogenannte ***Kosinusformel***, die zur Winkelberechnung verwendet wird.

Die Kosinusformel

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien vom Nullvektor verschiedene Vektoren und γ sei der Winkel zwischen ihnen. Dann gilt:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$



Beispiel: Winkel zwischen zwei Vektoren

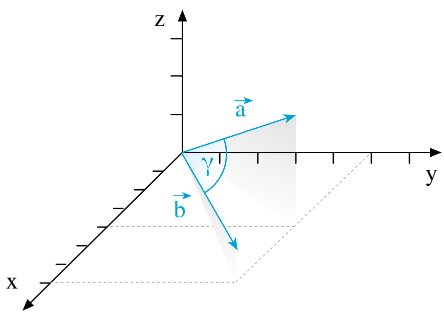
Errechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:
Wir errechnen zunächst die Beträge von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{50}$, $|\vec{b}| = \sqrt{75}$.

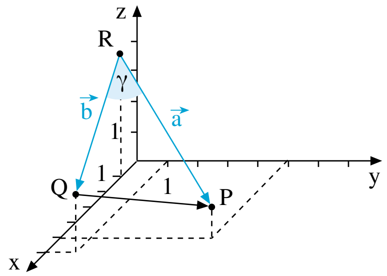
Nun wenden wir die Kosinusformel an:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{56}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{75}} \approx 0{,}9145.$$

Mit dem Taschenrechner ($\cos^{-1}$-Taste) folgt $\gamma \approx 23{,}87°$.



Beispiel: Winkel im Dreieck
Gegeben sei das Dreieck mit den Ecken P(5|5|1), Q(6|1|2), R(1|0|4). Bestimmen Sie die Größe des Innenwinkels γ am Punkt R des Dreiecks.



Lösung:
Wir stellen die beiden Dreiecksseiten, die am Winkel γ anliegen, zunächst durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{RP}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{RQ}$ dar.

$$\vec{a} = \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

γ lässt sich als Winkel zwischen diesen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auffassen.
Nun können wir mit Hilfe der Kosinusformel den Kosinus des Winkels γ bestimmen. Wir erhalten $\cos\gamma \approx 0{,}8004$.

$$\vec{b} = \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{20 + 5 + 6}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{30}} \approx 0{,}8004$$

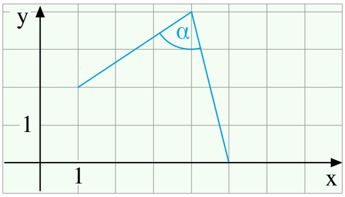
Hieraus folgt unmittelbar $\gamma \approx 36{,}83^\circ$.

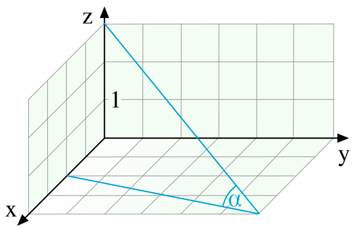
$\gamma \approx 36{,}83°$

Übung 1 Winkel zwischen Vektoren
Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Übung 2 Winkel in Ebene und Raum
Bestimmen Sie die Größe des Winkels α mit Hilfe von Vektoren.

a)


b)


Übung 3 Winkel im Dreieck
Bestimmen Sie alle Winkel im Dreieck PQR.
a) P(3|4), Q(6|3), R(3|0) b) P(3|4|1), Q(6|3|2), R(3|0|3)
c) P(6|3|8), Q(7|4|3), R(4|4|2) d) P(1|2|2), Q(3|4|2), R(2|3|2 + $\sqrt{3}$)

Übung 4 Parameteraufgabe
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Berechnen Sie diejenigen Werte der Koordinate z, damit der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Größe von 45° hat.

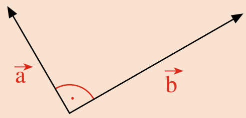
B. Orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b} \neq 0$) werden als zueinander ***orthogonale Vektoren*** bezeichnet, wenn sie senkrecht aufeinander stehen (symbolische Schreibweise $\vec{a} \perp \vec{b}$). Mit Hilfe des Skalarproduktes kann man überprüfen, ob zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ orthogonal sind.
Ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$, also $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma = \vec{0}$, so folgt wegen $|\vec{a}| \neq \vec{0}$, $|\vec{b}| \neq \vec{0}$ sofort $\cos\gamma = 0$, d. h. $\gamma = 90°$.
Dann sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal.
Ist $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq \vec{0}$, so ist $\cos\gamma \neq 0$, also $\gamma \neq 90°$.
Dann sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal.

Orthogonalitätskriterium

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) sind genau dann orthogonal (senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt null ist.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



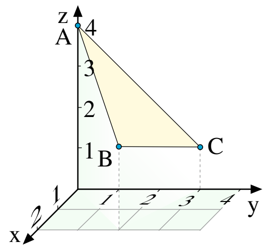
Beispiel: Orthogonale Vektoren
Prüfen Sie, ob zwei der drei Vektoren orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ sind nicht orthogonal.
$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c}$ sind orthogonal.
$\vec{b} \cdot \vec{c} = 15 \Rightarrow \vec{b}, \vec{c}$ sind nicht orthogonal.

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck
Prüfen Sie, ob das Dreieck mit den Eckpunkten A(0|0|4), B(2|2|2), C(0|3|1) rechtwinklig ist (Schrägbild anfertigen).

Lösung:
Im Schrägbild ist die Rechtwinkligkeit des Dreiecks nicht erkennbar.
Bilden wir jedoch rechnerisch die Seitenvektoren und berechnen dann deren Skalarprodukte, so stellt sich heraus, dass das Dreieck bei B rechtwinklig ist.



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 6$$

Übung 5 Orthogonale Vektoren
Suchen Sie unter den gegebenen Vektoren alle Paare orthogonaler Vektoren.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

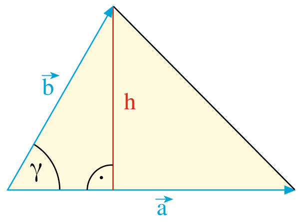
Übung 6 Rechtwinklige Dreiecke
Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

a) A(2|2|0), B(1|4|2), C(3|2|5)
b) A(3|−1|2), B(4|2|1), C(−3|2|5)
c) A(2|5|3), B(6|7|−1), C(3|7|5)

C. Der Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt eines Dreiecks
Spannen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Anschauungsraum ein Dreieck auf, so gilt für dessen Flächeninhalt A die Formel:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}\,.$$



Beweis:
Ausgehend von der Standardformel für den Dreiecksinhalt

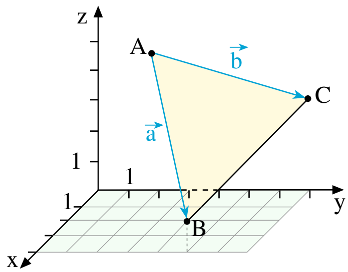
$$A = \frac{1}{2}\, g \cdot h = \frac{1}{2}\,|\vec{a}| \cdot h$$

ergibt sich die obige Formel nach nebenstehender Rechnung.
Dabei kommen die trigonometrische Beziehung $\sin\gamma = \frac{h}{|\vec{b}|}$ und die Kosinusformel $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ zur Anwendung.

Rechnung:

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\,|\vec{a}| \cdot h = \tfrac{1}{2}\,|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\gamma \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2\gamma} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1-\cos^2\gamma)} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2\gamma} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \end{aligned}$$

Beispiel: Bestimmen Sie den Inhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A(1|2|5), B(4|5|1), C(−2|6|2).



Lösung:
Das Dreieck wird von den beiden Vektoren

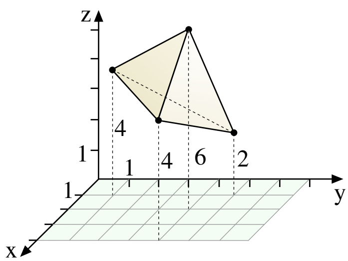
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks wird mit der oben aufgeführten Formel berechnet.

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{34 \cdot 34 - 15^2} \approx 15{,}26 \end{aligned}$$

Resultat: $A_{\text{Dreieck}} \approx 15{,}26$.

Übung 7 Oberfläche einer Pyramide
Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide
a) mit den Eckpunkten A(3|3|0), B(1|1|4), C(6|0|2), D(4|4|3);
b) aus nebenstehendem Bild.

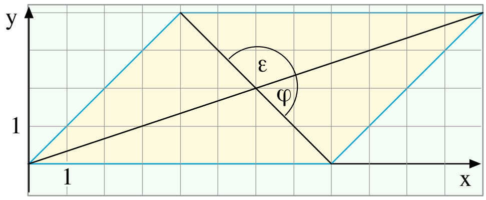


Übung 8 Inhalt eines Dreiecks
Wie muss z gewählt werden, damit das Dreieck ABC den Inhalt 15 besitzt?
A(1|1|2), B(1|−2|z), C(7|−2|6)

Übungen

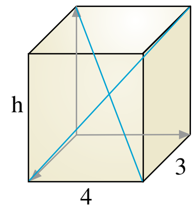
9. Winkel und Fläche eines Dreiecks
Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (6|1|2), B (5|5|1) und C (1|0|4).
a) Fertigen Sie ein Schrägbild des Dreiecks an und berechnen Sie seine Innenwinkel.
b) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABC?

10. Parallelogramm
Bestimmen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes die Innenwinkel ε und φ im abgebildeten Parallelogramm. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms konventionell und mittels Skalarprodukt (Hinweis: doppeltes Dreieck).

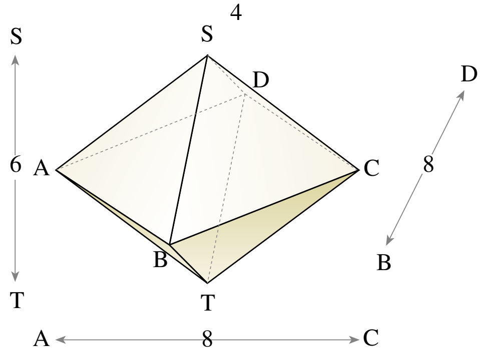


11. Rechtwinkliges Dreieck
Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes C so, dass das Dreieck ABC mit A (1|1) und B (4|5) rechtwinklig und gleichschenklig ist.

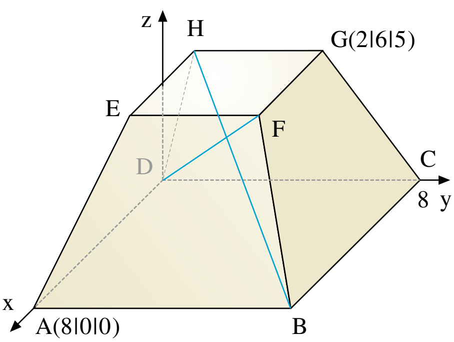
12. Winkel im Quader
Ein Quader hat die Grundflächenmaße 4×3. Wie muss seine Höhe h gewählt werden, wenn seine Raumdiagonalen sich senkrecht schneiden sollen?



13. Doppelpyramide
Ein Edelstein hat die Form einer quadratischen Doppelpyramide mit den in der Zeichnung angegebenen Maßen (Abstände gegenüberliegender Ecken).
a) Welche Innenwinkel hat ein Seitendreieck der Pyramide?
b) Wie groß sind die Winkel ∢ASC bzw. ∢SBT?
c) Wie groß ist die Oberfläche des Körpers?



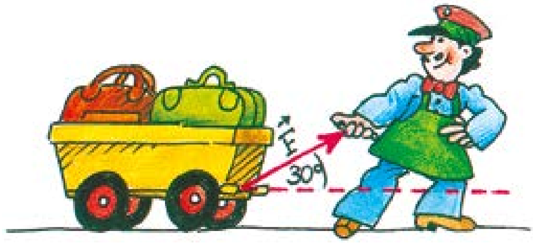
14. Pyramidenstumpf
Betrachtet wird ein regelmäßiger quadratischer Pyramidenstumpf.
a) Bestimmen Sie alle Eckpunktkoordinaten.
b) Errechnen Sie den Winkel ∢ABF.
c) Berechnen sie den Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{BH}$ und $\overline{DF}$. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittwinkel.
d) Welchen Oberflächeninhalt hat der Pyramidenstumpf?



D. Die physikalische Arbeit

Abschließend wenden wir das Skalarprodukt zur Berechnung der physikalischen Arbeit entsprechend den Ausführungen zu dessen Einführung auf Seite 64 an.

Beispiel: Ein Wagen wird auf ebener Strecke 250 Meter weit gezogen, wobei die Deichsel in einem Winkel von 30° gegen die Horizontale geneigt ist.
In Richtung der Deichsel wird mit einer Kraft von 150 N gezogen.
Welche Arbeit wird dabei verrichtet?



Lösung:
Arbeit = Kraft · Weg
$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos 30° = 150\,\mathrm{N} \cdot 250\,\mathrm{m} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 32\,476\,\mathrm{Nm}$

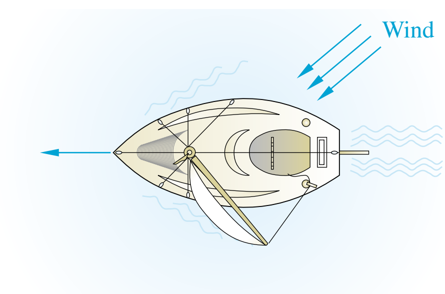
Beispiel: Ein UFO bewegt sich unter dem Einfluss seiner drei Antriebsdüsen und des Windes vom Punkt A(10|10|20) zum Punkt B(800|200|500).
Welche Arbeit wird dabei von den Düsen verrichtet, wenn diese Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 2000 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 2000 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 2000 \end{pmatrix}$ bewirken?

Lösung:
Wir bestimmen zunächst durch Addition von $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ die resultierende Gesamtkraft $\vec{F}$ sowie durch Subtraktion der Ortsvektoren von B und A den Wegvektor $\vec{s}$: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 6000 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} 790 \\ 190 \\ 480 \end{pmatrix}$.

Nun bilden wir das Skalarprodukt und erhalten als Resultat: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = 3\,310\,000\,\mathrm{Nm}$.

Übung 15

Ein Segelboot wird so gesteuert, dass der Wind mit einem Winkel von 40° zur Fahrtrichtung einfällt.
Der Wind übt auf das Segel eine Kraft von 2500 N aus.
Wie groß ist die vom Wind nach einer Fahrtstrecke von 10 km am Boot verrichtete Arbeit?



3. Untersuchung von Figuren und Körpern

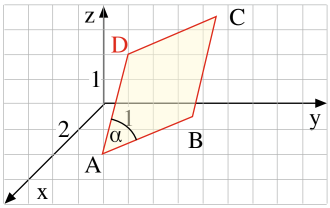
In den folgenden Beispielen und Übungen werden einige Inhalte dieses Kapitels in zusammengefasster Form auf Figuren und Körper angewandt.

Beispiel: Parallelogramm

a) Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem die Punkte A (6|3|1), B (5|6|2) und C (1|5|4).
b) Bestimmen Sie einen weiteren Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist. Zeichnen Sie das Parallelogramm ABCD im Koordinatensystem ein.
c) Bestimmen Sie die Größe des Innenwinkels α des Parallelogramms bei Punkt A.
d) Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Lösung zu a:
Wir zeichnen ein kartesisches Koordinatensystem und tragen die Punkte A bis C ein.

Zeichnung zu a und b:



Lösung zu b:
Die Koordinaten des Punktes D erhalten wir durch Verschiebung des Punktes A mit dem Verschiebungsvektor $\overrightarrow{BC}$ (s. Abbildung) Wir erhalten so den Punkt D (2|2|3).
Durch Einzeichnen der Verbindungsstrecken entsteht das Schrägbild des Parallelogramms.

Bestimmung des Punktes D:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung zu c:
Der Winkel α bei Punkt A ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$.
Er wird mit der Kosinusformel bestimmt:
Das Resultat lautet: $\alpha \approx 78{,}6°$.

Winkelberechnung:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{231}} \approx 0{,}1974$$

$\Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}1974 \approx 78{,}6°$

Lösung zu d:
Der Umfang U des Parallelogramms ist gleich $U = 2 \cdot (|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AD}|) \approx 15{,}8$.

Die Fläche des Parallelogrammms ABCD ist doppelt so groß wie die Fläche des Dreiecks ABD, welche mit der Flächeninhaltsformel für Dreiecke bestimmt werden kann.
Resultat: $A \approx 14{,}9$

Umfang und Fläche des Parallelogramms:

$$U = 2 \cdot (|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AD}|) = 2 \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{21}) \approx 15{,}8$$

$$A = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{(\overrightarrow{AB})^2 \cdot (\overrightarrow{AD})^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2}\right)$$
$$= \sqrt{11 \cdot 21 - 9} = \sqrt{222} \approx 14{,}9$$

Übung 1 Trapez

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Vierecks ABCD mit A (1|3|1), B (5|7|−3), C (−2|4|0), D (−4|2|2).
b) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.
c) Berechnen Sie den Umfang des Trapezes.
d) Wie groß ist der Innenwinkel des Trapezes bei Punkt B?

Beispiel: Längen und Winkel in einer Pyramide

Eine Pyramide ist im Lauf der Jahrtausende im Sand etwas abgekippt. Das Viereck ABCD mit A(13|0|0), B(13|12|5), C(0|12|5) und D(0|0|0) ist die Grundfläche der Pyramide. Die Spitze ist S(6,5|1|14,5), 1 LE = 10 m.

a) Zeigen Sie: Die Grundfläche ist ein Quadrat.

b) Wie lautet der Mittelpunkt M des Quadrats? Welche Höhe hat die Pyramide?

c) Welchen Winkel bildet die Kante $\overline{AS}$ mit der Grundfläche der Pyramide?

Lösung zu a:
Wir überprüfen die Seitenlängen und Diagonalen im Viereck ABCD, denn beim Quadrat sind typischerweise die vier Seiten gleich und die beiden Diagonalen ebenfalls. Wir bestimmen also die vier Seitenvektoren der Grundfläche und berechnen ihren Betrag. Sie sind alle gleich lang.
Das Gleiche gilt für die beiden Diagonalenvektoren. Damit ist klar: Die Grundfläche ABCD ist ein Quadrat.

Seitenlängen ders Grundfläche:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{0^2 + 12^2 + 5^2} = 13$$

$$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13^2 + 0^2 + 0^2} = 13$$

Diagonalenlängen der Grundfläche:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -13 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -13 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$|AC| = |BD| = \sqrt{338}$$

Lösung zu b:
Den Ortsvektor des Punktes M erhält man, indem man zum Ortsvektor $\vec{O}$ des Ursprungs die Hälfte des Diagonalenvektors $\overrightarrow{DB}$ addiert.
Ergebnis: M(6,5|6|2,5).

Der Höhenvektor $\overrightarrow{MS}$ hat den Betrag $|\overrightarrow{MS}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + 12^2} = 13$. Dies ist die Höhe der Pyramide.

Ortsvektor des Mittelpunktes M, Höhenvektor $\overrightarrow{MS}$:

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

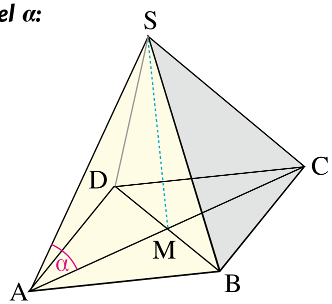
$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung zu c:
Der Winkel α zwischen der Seitenkante $\overline{AS}$ und der Grundfläche ABCD entspricht dem Winkel zwischen der Seitenkante $\overline{AS}$ und der Strecke $\overline{AM}$.

Der Kantenvektor $\overrightarrow{AS}$ hat den Betrag $|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{(-6{,}5)^2 + 1^2 + 14{,}5^2} \approx 15{,}92$.

Wir kennen nun die Längen von Gegenkathete $\overline{MS}$ und Hypotenuse $\overline{AS}$ im rechtwinkligen Dreieck AMS und können somit den Winkel α = 54,7° berechnen.

Winkel α:



$$\sin\alpha = \frac{GK}{HYP} = \frac{|MS|}{|AS|} = \frac{13}{15{,}92} \approx 0{,}8166$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 54{,}7°$$

Übungen

2. Vierecksuntersuchungen

a) Zeigen Sie: Das Viereck ABCD mit A (1|−2|4), B (5|2|0), C (9|3|0) und D (7|1|2) ist ein Trapez.
b) Zeigen Sie: ABCD mit A (−3|1|2), B (1|6|4), C (4|8|1) und D (0|3|−1) ist ein Parallelogramm.
c) Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(−3|1|2), B (1|3|4) und C (3|5|8). Gesucht ist ein Punkt D, der das Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzt.

3. Raute

a) Zeigen Sie, dass B (5|3|2) und D (4|6|4) von Punkt A (3|2|6) gleich weit entfernt sind.
b) Wie muss Punkt C gewählt werden, damit das Viereck ABCD eine Raute ist?
c) Ermitteln Sie die Innenwinkel sowie den Flächeninhalt der Raute ABCD.

4. Dreieck: Nachweis der Gleichschenkligkeit

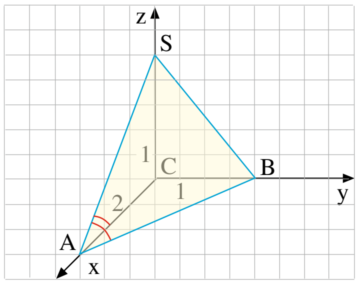
a) Zeigen Sie: Das Dreieck ABC mit A (1|4|2), B (3|2|4) und C (6|5|1) ist gleichschenklig.
b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ sowie die Innenwinkel des Dreiecks.

5. Dreieck/Viereck: Nachweis der Rechtwinkligkeit

a) Zeigen Sie: Das Dreieck ABC mit A (1|4|2), B (3|2|4) und C (5|6|6) ist rechtwinklig.
b) Zeigen Sie: Das Viereck ABCD mit A (1|4|2), B (3|2|4), C (9|5|1) und D (7|7|−1) ist ein Rechteck.

6. Dreiseitige Pyramide

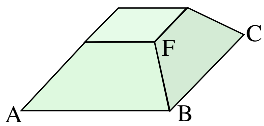
a) Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.
b) Berechnen Sie die Seitenlängen $\overline{AB}$ und $\overline{AS}$ der Pyramide.
c) Welcher der beiden Winkel ∢BAS oder ∢CAS ist der größere?
d) Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche der Pyramide.



7. Pyramidenstumpf

ABCDEFGH sei ein Pyramidenstumpf.
Von der Grundfläche ABCD ist bekannt: A (12|0|0), B (12|12|0), C (0|12|0), D (0|0|0)
Von der Deckfläche EFGH ist nur der Punkt F bekannt: F (9|9|4)

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Deckflächeneckpunkte E, G und H.
b) Fertigen Sie ein Schrägbild des Pyramidenstumpfes an.
c) Berechnen Sie die Größe der Winkel ∢BAE und ∢AEF.
d) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Trapezes ABFE.
e) Wie groß ist die Oberfläche des Pyramidenstumpfes?
f) Wie groß ist das Volumen des Pyramidenstumpfes?



Übungen

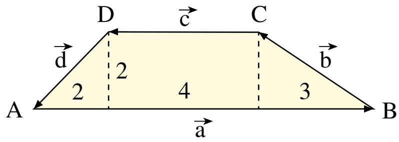
Die folgenden Übungen sollen ohne Hilfsmittel gelöst werden.

1. Skalarprodukt

a) Geben Sie die Definitionsgleichung des Skalarproduktes an.

b) Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) Gegeben ist das Trapez ABCD. Berechnen Sie mit Hilfe eines geeigneten Koordinatensystems die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{d}$.



2. Orthogonalität

a) Formulieren Sie das Kriterium für die Orthogonalität zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

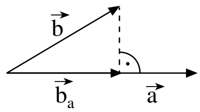
b) Entscheiden Sie begründet, welche der folgenden Vektoren orthogonal zueinander sind.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) Untersuchen Sie, für welche Werte von u die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} u \\ 2u \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

d) Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
(1) A (2|6|4), B (4|14|6), C (0|14|10) (2) A (6|4|2), B (8|8|6), C (4|9|7)

e) Bestimmen Sie die senkrechte Projektion $\vec{b}_a$ des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$.

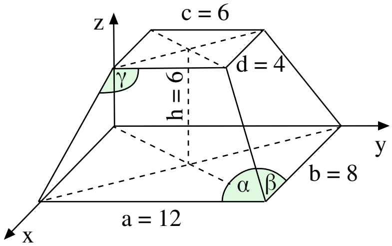


3. Flächeninhalt

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit A (0|0|0), B (4|4|2) und C (−2|4|−4).

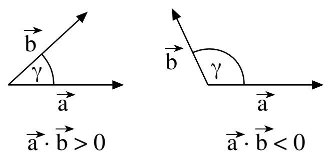
4. Winkel

Gegeben ist der abgebildete symmetrische Pyramidenstumpf, der eine rechteckige Grundfläche und eine rechteckige Deckfläche hat. Er hat die Höhe h = 6. Berechnen Sie die Winkel α, β und γ. Sie können folgende Information verwenden:
$\arccos\frac{3}{7} \approx 64{,}6°$, $\arccos\frac{2}{7} \approx 73{,}4°$.



5. Skalarprodukt

Begründen Sie: Ist der Winkel γ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kleiner als 90°, so ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ positiv. Ist der Winkel γ größer als 90°, so ist das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ negativ.



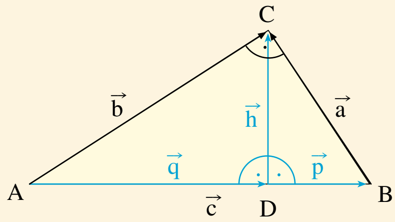
Elementargeometrische Beweise mit dem Skalarprodukt

Das Skalarprodukt wird häufig für Winkelberechnungen verwendet. Aber es kann auch zum Nachweis elementargeometrischer Eigenschaften und Sätze eingesetzt werden, die mit Orthogonalität zu tun haben, was im Folgenden angesprochen wird.

Beweis des Höhensatzes

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Höhe h und den Hypotenusenabschnitten p und q.

Beweisen Sie: $h^2 = p \cdot q$.



Lösung:
Wir belegen zunächst die Seiten, Höhe und die Hypotenusenabschnitte mit Vektoren, wie abgebildet. Dann nehmen wir alle Voraussetzungen in eine Sammlung auf zum Zweck des späteren Gebrauchs. Schließlich weisen wir durch eine Kettenrechnung $h^2 = p \cdot q$ nach.

Beweis:

$h^2 = \lvert\vec{h}\rvert^2 = \vec{h} \cdot \vec{h}$	Rechengesetz
$= (\vec{b} - \vec{q}) \cdot \vec{h}$	nach (3)
$= \vec{b} \cdot \vec{h} - \vec{q} \cdot \vec{h}$	Rechengesetz
$= \vec{b} \cdot \vec{h}$	nach (8)
$= \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{p})$	nach (4)
$= \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{p}$	Rechengesetz
$= \vec{b} \cdot \vec{p}$	nach (5)
$= (\vec{q} + \vec{h}) \cdot \vec{p}$	nach (3)
$= \vec{q} \cdot \vec{p} + \vec{h} \cdot \vec{p}$	Rechengesetz
$= \vec{q} \cdot \vec{p}$	nach (7)
$= \lvert\vec{q}\rvert \cdot \lvert\vec{p}\rvert \cdot \cos 0°$	Definition des SP
$= \lvert\vec{q}\rvert \cdot \lvert\vec{p}\rvert$	da $\cos 0° = 1$ ist
$= p \cdot q$	

Vektorbelegungen:

$\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{h} = \overrightarrow{DC}$,
$\vec{q} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{p} = \overrightarrow{DB}$

Sammlung der Voraussetzungen:

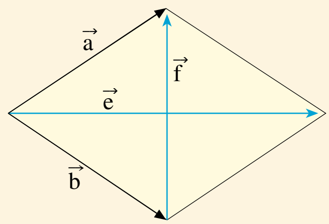
(1) $\vec{c} = \vec{q} + \vec{p}$
(2) $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$
(3) $\vec{h} = \vec{b} - \vec{q}$
(4) $\vec{h} = \vec{a} + \vec{p}$
(5) $\vec{a} \perp \vec{b}$, d.h. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
(6) $\vec{h} \perp \vec{c}$, d.h. $\vec{h} \cdot \vec{c} = 0$
(7) $\vec{h} \perp \vec{p}$, d.h. $\vec{h} \cdot \vec{p} = 0$
(8) $\vec{h} \perp \vec{q}$, d.h. $\vec{h} \cdot \vec{q} = 0$

Übungen

1. Kathetensatz
Im rechtwinkligen Dreieck gelten die Beziehungen $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$. Beweisen Sie diese mit Hilfe des Skalarproduktes. Gehen Sie ähnlich vor wie im obigen Beispiel.

2. Alternativer Beweis des Höhensatzes
Erläutern Sie den folgenden Kurzbeweis des Höhensatzes schrittweise (siehe Zeichnung oben):
$0 = \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{h} - \vec{p}) \cdot (\vec{q} + \vec{h}) = \vec{h} \cdot \vec{q} + \vec{h} \cdot \vec{h} - \vec{p} \cdot \vec{q} - \vec{p} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} - \vec{p} \cdot \vec{q} = h^2 - p \cdot q$

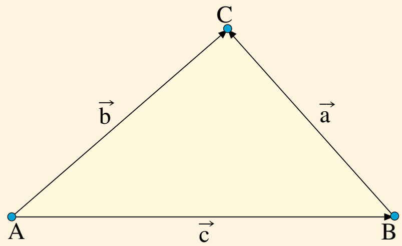
3. Diagonalen einer Raute
Zeigen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes, dass die Diagonalen einer Raute senkrecht aufeinander stehen.

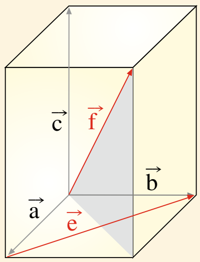


4. Beweisen Sie die Umkehrung der Aussage aus Übung 3:
Stehen in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht aufeinander, ist es eine Raute.

5. Beweisen Sie:
Ein Rechteck ist genau dann ein Quadrat, wenn seine Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

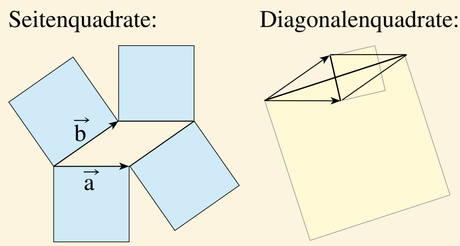
6. Satz des Pythagoras
Beweisen Sie:
a) In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.
b) Gilt in einem Dreieck mit den Seiten a, b und c die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig.



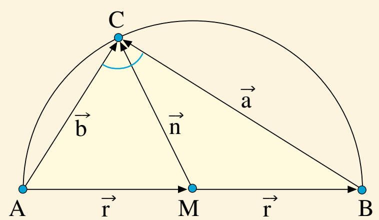


7. Senkrechte Strecken im Quader
Zeigen Sie, dass in einem Quader mit quadratischer Grundfläche die Grundflächendiagonale e und die Raumdiagonale f senkrecht zueinander stehen.

8. Quadrate im Parallelogramm
Beweisen Sie: In einem Parallelogramm ist die Summe der Diagonalenquadrate ebenso groß wie die Summe der Seitenquadrate (siehe Abbildung).



9. Satz des Thales
Der Satz des Thales besagt: Liegt ein Punkt C auf dem Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$, so hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.
Beweisen Sie diese Aussage. Verwenden Sie die abgebildete Beweisfigur. Berechnen Sie dazu $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



Überblick

Skalarprodukt:

Kosinusform: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ $(0° \le \gamma \le 180°)$

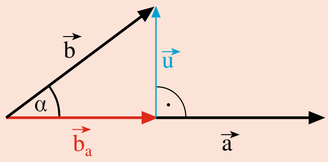
Koordinatenform: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Skalarprodukt und orthogonale Projektion:

Der Vektor $\vec{b}_a$ heißt **orthogonale Projektion** des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$:

- $\vec{b}_a$ und $\vec{a}$ sind kollinear.
- $\vec{b}_a + \vec{u} = \vec{b}$ $(\vec{u} \perp \vec{a})$



Für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}_a$

Betrag eines Vektors:

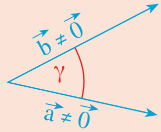
Der Betrag eines Vektors ist die Länge eines seiner Pfeile.

Ebene: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Raum: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

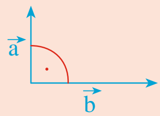
Winkel zwischen Vektoren:

Kosinusformel: $\cos\gamma = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$



Orthogonale Vektoren:

$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

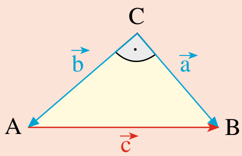


Rechtwinkliges Dreieck:

Das Dreieck ABC ist genau dann bei C rechtwinklig, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

(1) $c^2 = a^2 + b^2$

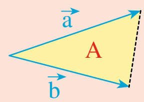
(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.



Flächeninhalt eines Dreiecks:

Das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Dreieck hat den Flächeninhalt

$A = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$.



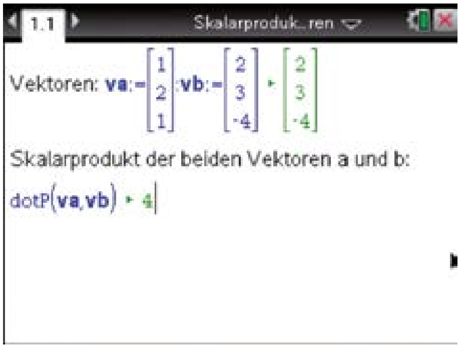
CAS-Anwendung

Winkelberechnungen, Orthogonalität von Vektoren

Zur Bestimmung von Winkel- und Flächengrößen dient das Skalarprodukt zweier Vektoren, das als Ergebnis eine reelle Zahl (einen Skalar) hat. Vor der Durchführung von Winkelberechnungen sollte man darauf achten, dass die Handheld-Einstellungen (Hauptmenü, Einstellungen, Einstellungen, Allgemein) geeignet gewählt sind (Grad statt Bogenmaß).
Dieselben Funktionen, die hier auf Notes-Seiten vorgestellt werden, können auch auf Calculator-Seiten verwendet werden. Notes-Seiten bieten den Vorteil, dass man sie speichern und mit anderen Werten wiederverwenden kann.

▶ **Beispiel: Skalarprodukt von Vektoren**
Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

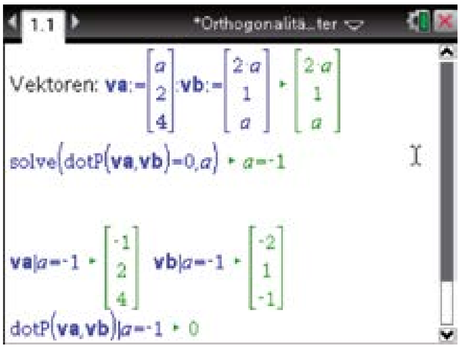
Lösung:
Die Vektoren werden zunächst mit den Bezeichnungen va und vb festgelegt.
Auf einer Calculator-Seite kann man das Skalarprodukt mithilfe der Funktion dotp berechnen. Bei der Arbeit in einer Math-Box findet man sie unter menu Berechnungen ▶ Matrix & Vektor ▶ Vektor ▶ Skalarprodukt.
Weniger zeitaufwändig ist es jedoch, dotP(va,vb) direkt hinzuschreiben.



▶ Man erhält: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$.

▶ **Beispiel: Orthogonalität von Vektoren mit Parameter**
Prüfen Sie, ob es einen Wert für a gibt, sodass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ orthogonal zueinander sind.

Lösung:
Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt null ist. Dies hängt hier vom Parameter a ab. Es ist also die Lösung a der Gleichung $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ mit dem CAS zu bestimmen.
Dazu werden die Vektoren mit den Bezeichnungen va und vb festgelegt. Mit dem Befehl solve(dotP(va,vb)=0,a) ergibt sich die Lösung $a = -1$; die Vektoren sind also genau dann orthogonal, wenn der Parameter a den Wert -1 hat. ▶



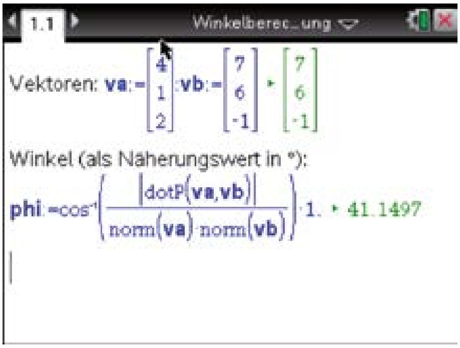
Beispiel: Winkelberechnung

Berechnen Sie auf einer Notes-Seite die Größe des Winkels (im Gradmaß) zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung:
Es wird die Kosinusformel (vgl. S. 70) verwendet in folgender Form:

$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

Auf einer Notes-Seite gibt man die Vektoren va und vb ein; die Koordinaten können jeweils verändert werden. Bei den trigonometrischen Funktionen findet man $\cos^{-1}$, den Betrag erhält man mithilfe der Funktion norm und ctrl enter liefert schließlich den Näherungswert 41,1497°.



Beispiel: Betrag eines Vektors auf zwei Arten

Bestimmen Sie die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf zwei verschiedene Arten.

Lösung:
Die Länge eines Vektors lässt sich mithilfe des Skalarproduktes ebenso bestimmen wie mithilfe der Funktion norm. Auf beide Arten erhält man das Ergebnis $\sqrt{21}$.

Übung 1

Betrachten Sie die vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie experimentell einen Wert für t, so dass der Winkel zwischen den beiden Vektoren ca. 47° beträgt. Gibt es Werte des Parameters t, so dass der Vektor $\vec{a}$ die Länge 3 hat?

Übung 2

Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind gegeben, der Vektor $\vec{w}$ hat die Koordinaten x, y, z. Was wird mit `solve(dotP(u,w)=0 and dotP(v,w)=0 and x^2+y^2+z^2=1,{x,y,z})` berechnet?

Flächenberechnungen mit dem Skalarprodukt

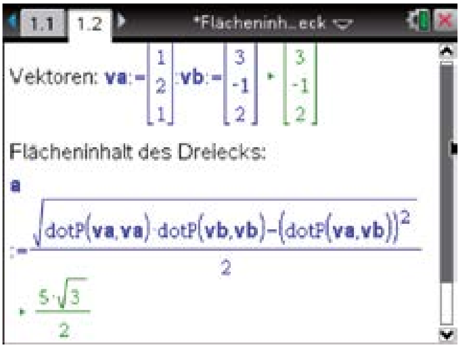
Auf Seite 73 findet man die Formel $A = \frac{1}{2}\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Das durch dieselben Vektoren aufgespannte Parallelogramm hat den Flächeninhalt $A = \sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$.
Im Folgenden werden diese Formeln mit dem CAS für Flächenberechnungen angewendet.
Hinweis: Nach Einführung des Kreuzproduktes vereinfacht sich die Berechnung.

Beispiel: Flächeninhalt eines Dreiecks
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von den beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ aufgespannten Dreiecks mithilfe eines CAS.

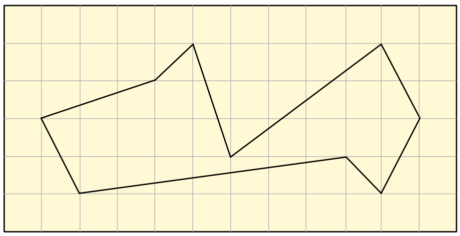
Lösung:
Zunächst werden die Vektoren mit den Bezeichnungen va und vb festgelegt. Die Berechnung kann dann auf einer Notes-Seite durch Eingabe der folgenden Zeile erfolgen:

$$A := \frac{\sqrt{\text{dotP(a,a)} \cdot \text{dot(b,b)} - (\text{dotP(a,b)})^2}}{2}$$

Ergebnis: $A = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ FE



Übung 3
Das nebenstehende Bild zeigt ein unregelmäßiges Neuneck. Wählen Sie ein Koordinatensystem und beschreiben Sie das Neuneck durch einen Vektorzug. Wählen Sie weitere Vektoren so, dass eine Zerlegung des Neunecks in Dreiecke entsteht (Triangulation). Berechnen Sie dann den Inhalt des Neunecks mit dem CAS.



Übung 4
Durch die Punkte A(2|−3|−1), B(−1|4|1), C(−3|−5|−2) und D(−1|2|4) ist eine dreiseitige Pyramide gegeben. Berechnen Sie mit dem CAS ihren Oberflächeninhalt.

Übung 5
Durch die Punkte A(4|−3|1), B(4|3|1), C(4|0|5), D(−2|−3|−1), E(−2|3|−1) und F(−2|0|3) ist ein schiefes, dreiseitiges Prisma gegeben. Berechnen Sie mit dem CAS dessen Oberflächeninhalt. Beachten Sie dabei, dass es sich bei Teilen der Oberfläche um kongruente Figuren handelt.

Test

Das Skalarprodukt

1. Winkel zwischen Vektoren

Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

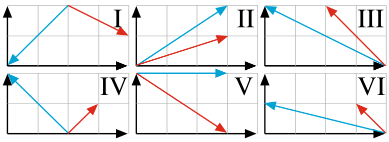
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -v \\ u \\ u \end{pmatrix}$

2. Skalarprodukt

Ordnen Sie jeder Figur den passenden Wert für das Skalarprodukt der beiden dargestellten Vektoren zu. Eine Einheit entspricht einer Karolänge.

Werte für das Skalarprodukt:

–2 12 5 0 11 9



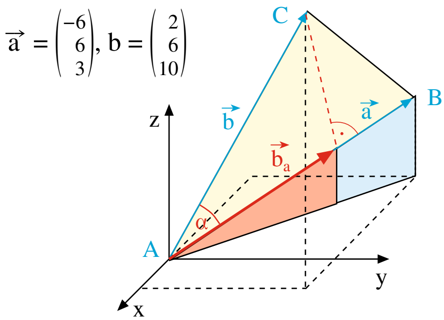
3. Parallelogramm

Ein Parallelogramm wird durch die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt.

a) Ermitteln Sie die Winkelgröße α im Parallelogramm.

b) Wie lautet die senkrechte Projektion $\vec{b}_a$ des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$?

c) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms.



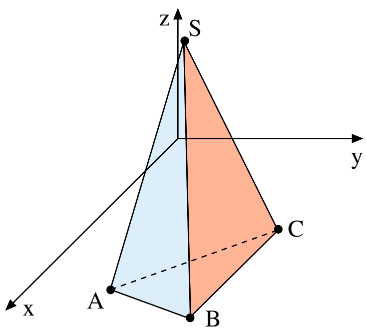
4. Pyramide

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ABCS hat die drei Eckpunkte A(13|3|–1), B(9|5|–5) und C(7|9|–1) und die Spitze S(6|3|8).

a) Berechnen Sie die Größe des Winkels BSA. Welchen Winkel bilden die Kanten AB und AS?

b) Zeigen Sie, dass die Grundfläche der Pyramide ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck ist.

c) Welcher Punkt D ergänzt die Grundfläche ABC zu einem Quadrat?



5. Flugroute

Ein Flugzeug passiert Punkt A(1|3|8) und zwei Minuten später den Punkt B(9|11|10) (Angaben im km). Im Punkt B geht das Flugzeug vom Steigflug in den waagerechten Streckenflug über. Geben Sie den Vektor an, der die neue Flugrichtung beschreibt. Wie groß ist der Winkel der Kursänderung?

Lösungen: S. ■■■

Bildnachweis

Illustrationen
Cornelsen/Anton Bigalke, Wald-Michelbach
Cornelsen/Detlev Schüler
Cornelsen/Gerlinde Keller
Cornelsen/Gudrun Lenz
Cornelsen/Klein und Halm, Grafikdesign Berlin
Cornelsen/Norbert Köhler

Screenshots
Cornelsen/Felix Arndt/© Texas Instruments. Nutzung mit Genehmigung von Texas Instruments

Abbildungen

Cover/bpk/Stiftung Preussische Schlösser und Gärten Berlin-Brandenburg/Leo Seidel;

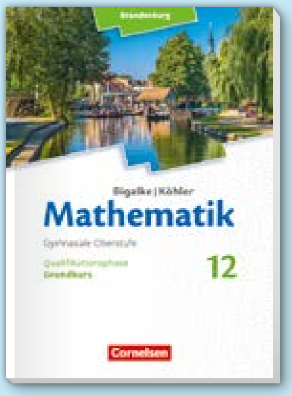
2/PEFC Deutschland e.V.; **15/**Shutterstock.com/ArTono; **26/o./**Cornelsen/Henning Knoff; **26/Mi./**Shutterstock.com/StockVector; **49/u.l./**Shutterstock.com/Hennadii H; **49/u. r./**Shutterstock.com/LynxVector; **50/o./**Shutterstock.com/Yuri Schmidt; **50/Mi. l./**Shutterstock.com/Axel Wolf; **50/Mi. r./**Shutterstock.com/HappyPictures; **50/u./**Shutterstock.com/Tim Carillet; **52/Bäume/**Shutterstock.com/Cat_arch_angel; **64/Figuren/**Shutterstock.com/Darq; **65/**stock.adobe.com/Peter Probst/meseberg; **77/**stock.adobe.com/Michael Rosskothen; **87/**Shutterstock.com/Ryszard Filipowicz; **89/**akg-images; **106/A/**stock.adobe.com/tai111; **106/B/**Shutterstock.com/lexaarts; **106/T/**stock.adobe.com/chagpg; **106/Turm/**Shutterstock.com/Rvector; **107/**Cornelsen/Norbert Köhler, Stahnsdorf; **116/**Shutterstock.com/Vector_dream_team; **118/Flugzeug** Shutterstock.com/Elartico; **119/B/**Shutterstock.com/Markus Gann; **119/C/**Shutterstock.com/Rvector; **119/F/**Shutterstock.com/Mountain Brothers; **121/**Shutterstock.com/southmind; **124/Helikopter/**stock.adobe.com/Archmotion.net; **124/Hintergrund/**stock.adobe.com/Oceloti; **124/Flugzeug/**stock.adobe.com/Oleksandr Rozhkov; **125/Ballon/**stock.adobe.com/junzportraits; **125/Drohne/**stock.adobe.com/nsit0108; **125/Insel/**stock.adobe.com/Robert Kneschke; **125/Schiff/**stock.adobe.com/sudowoodo; **125/U-Boot/**stock.adobe.com/Zefir; **125/Wüste/**stock.adobe.com/ActiveLines; **129/Flugzeug/**Shutterstock.com/fckncg; **129/Helikopter/**stock.adobe.com/tai111; **129/Turm/**Shutterstock.com/Rvector

Die Ausgaben im Überblick für Brandenburg

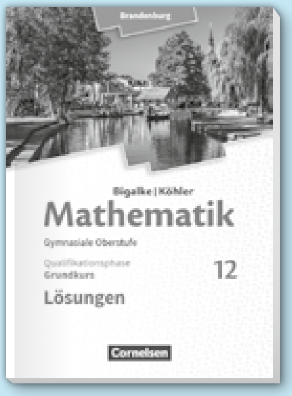
Neue Materialien für die 12. Klasse

Passgenau zum Lehrplan

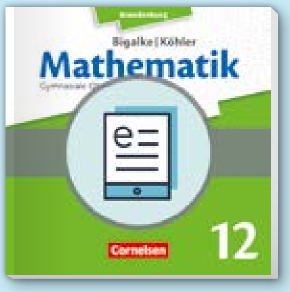
NEU Bigalke/Köhler: Mathematik
Ausgabe Brandenburg
12. Schuljahr, Grundkurs



Schülerbuch Grundkurs
Kartoniert
978-3-06-040667-8 25,99

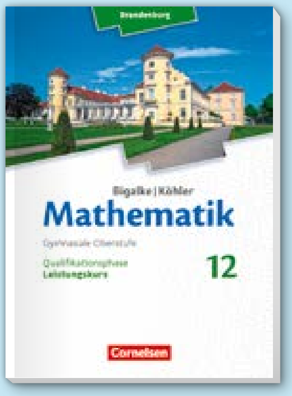


Lösungen zum Schülerbuch
Kartoniert
978-3-06-040671-5 19,99

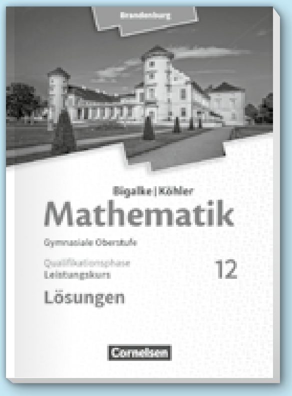


Schülerbuch – E-Book
Einzellizenz/1 Jahr/scook.de
978-3-06-040972-3 8,99

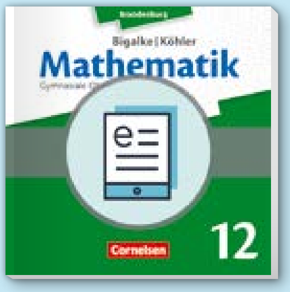
NEU Bigalke/Köhler: Mathematik
Ausgabe Brandenburg
12. Schuljahr, Leistungskurs



Schülerbuch Leistungskurs
Kartoniert (Aug 2020)
978-3-06-040669-2 26,99



Lösungen zum Schülerbuch
Kartoniert (Sept. 2020)
978-3-06-040673-9 19,99



Schülerbuch – E-Book
Einzellizenz/1 Jahr/scook.de (Aug. 2020)
978-3-06-040974-7 8,99

Service Center
Telefon: 0800 12 120 20 (kostenlos aus dem dt. Festnetz)
+49 30 897 85-640 (Mobilfunknetz / Ausland)
Mo – Fr 8 – 18 Uhr (außerhalb dieser Zeit erreichen Sie unsere automatische Bestellannahme)
Fax: +49 30 897 85-578
E-Mail: service@cornelsen.de

Cornelsen Verlag
14328 Berlin
cornelsen.de

Preisangaben in € (D), Stand 1. 01. 2020. Preisänderung und Irrtum vorbehalten. Alle Preise enthalten die zzt. geltende Mehrwertsteuer.

P9702634 VBD 0720