Brandenburg

Bigalke | Köhler

Mathematik

Gymnasiale Oberstufe

Qualifikationsphase
Leistungskurs

12

Teildruck
3. Kapitel: Geraden

Cornelsen

Bigalke | Köhler

Mathematik

Redaktion: Dr. Ulf Rothkirch
Layout: Klein und Halm Grafikdesign, Berlin
Bildrecherche: Kai Mehnert

Grafik: Dr. Anton Bigalke, Waldmichelbach
Illustration: Detlev Schüler †, Berlin (66-1, 75-1, 75-2);
Cornelsen/Henning Knoff (26-1);
Dr. Norbert Köhler, Stahnsdorf (107-1, 107-2, 107-3);
Dr. Anton Bigalke, Waldmichelbach (alle weiteren)
Umschlaggestaltung: Klein und Halm Grafikdesign,
Hans Herschelmann, Berlin
Technische Umsetzung: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg

Bilder aus dem Land Brandenburg
Umschlag: Schloss Rheinsberg
Seite 15: Angermünde, Rathaus
Seite 65: Dahme/Mark
Seite 87: Beelitz-Heilstätten, Baumkronenpfad

www.cornelsen.de

1. Auflage, 1. Druck 2020

Alle Drucke dieser Auflage sind inhaltlich unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

ISBN 978-3-06-040669-2 (Schülerbuch)
ISBN 978-3-06-040974-7 (E-Book)

PEFC
PEFC/04-32-0928

PEFC zertifiziert
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.

www.pefc.de

Bildnachweis

Screenshots
Cornelsen/Felix Arndt/© Texas Instruments. Nutzung mit Genehmigung von Texas Instruments

Abbildungen

Cover/bpk/Stiftung Preussische Schlösser und Gärten Berlin-Brandenburg/Leo Seidel;

87/Shutterstock.com/Ryszard Filipowicz; **89/**akg-images; **106/A/**stock.adobe.com/ tai111; **106/B/**Shutterstock.com/lexaarts; **106/T/**stock.adobe.com/chagpg; **106/Turm/**Shutterstock.com/Rvector; **107/**Cornelsen/Norbert Köhler, Stahnsdorf; **116/**Shutterstock.com/Vector_dream_team; **118/Flugzeug** Shutterstock.com/Elartico; **119/B/**Shutterstock.com/Markus Gann; **119/C/**Shutterstock.com/Rvector; **119/F/**Shutterstock.com/Mountain Brothers; **121/**Shutterstock.com/southmind; **124/Helikopter/**stock.adobe.com/Archmotion.net; **124/Hintergrund/**stock.adobe.com/Oceloti; **124/Flugzeug/**stock.adobe.com/Oleksandr Rozhkov; **125/Ballon/**stock.adobe.com/junzportraits; **125/Drohne/**stock.adobe.com/nsit0108; **125/Insel/**stock.adobe.com/Robert Kneschke; **125/Schiff/**stock.adobe.com/sudowoodo; **125/U-Boot/**stock.adobe.com/Zefir; **125/Wüste/**stock.adobe.com/ActiveLines; **129/Flugzeug/**Shutterstock.com/fckncg; **129/Helikopter/**stock.adobe.com/tai111; **129/Turm/**Shutterstock.com/Rvector

Inhalt

III. Geraden

1. Lineare Gleichungssysteme (Wiederholung)

Im Folgenden werden Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme wiederholt.

A. Das Additionsverfahren bei Gleichungssystemen mit zwei Variablen

Zunächst bringen wir uns ein elementares Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme anhand eines einfachen Beispiels (2 Gleichungen, 2 Variable) in Erinnerung.

Beispiel: Gleichungssystem

Lösen Sie das nebenstehende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & 2x - 4y = 2 \\ \mathrm{II} & 5x + 3y = 18 \end{array}$$

Lösung:

Wir verwenden das Additionsverfahren. Wir multiplizieren Gleichung I mit −5 und Gleichung II mit 2, sodass die Koeffizienten von x den gleichen Betrag, aber verschiedene Vorzeichen erhalten.

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{I} & 2x - 4y = 2 & \rightarrow (-5) \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{II} & 5x + 3y = 18 & \rightarrow 2 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

So entsteht ein neues Gleichungssystem. Es ist zum Ursprungssystem äquivalent.

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{I} & -10x + 20y = -10 & \\ \mathrm{II} & 10x + 6y = 36 & \rightarrow \mathrm{I} + \mathrm{II} \end{array}$$

Nun addieren wir Gleichung I zu Gleichung II. Bei diesem Additionsvorgang wird die Variable x eliminiert. Das neue Gleichungssystem ist äquivalent zum vorhergehenden.

$$\begin{array}{lr} \mathrm{I} & -10x + 20y = -10 \\ \mathrm{II} & 26y = 26 \end{array}$$

Gleichung II enthält nun nur noch eine Variable, nämlich y. Auflösen der Gleichung nach y liefert y = 1 als Lösungswert.

Aus II folgt $y = 1$.

Setzen wir dieses Teilresultat in Gleichung I ein, so folgt x = 3.

Einsetzen in I liefert: $x = 3$

Lösungsmenge: $L = \{(3;1)\}$

Die Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme beruhen darauf, dass die Anzahl der Variablen pro Gleichung durch Umformungen schrittweise reduziert wird, bis nur noch eine Variable übrig bleibt.
Die verwendeten Umformungen dürfen die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändern. Umformungen mit dieser Eigenschaft werden als ***Äquivalenzumformungen*** bezeichnet.
Die drei wesentlichen Äquivalenzumformungen sind nebenstehend aufgeführt.

Äquivalenzumformungen eines Gleichungssystems

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, wenn

(1) 2 Gleichungen vertauscht werden,

(2) eine Gleichung mit einer reellen Zahl $k \neq 0$ multipliziert wird,

(3) eine Gleichung zu einer anderen Gleichung addiert wird.

Zur Pfeilschreibweise: A → B bedeutet: A wird durch B ersetzt.

B. Das Lösungsverfahren von Gauß

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) war ein deutscher Mathematiker und Astronom, der sich bereits in frühester Jugend durch überragende Intelligenz auszeichnete. Fast 50 Jahre lang war er als Mathematikprofessor an der Uni Göttingen tätig. Neben der Mathematik beschäftigte er sich vor allem mit der Astronomie. Durch eine neue Berechnung der Umlaufbahnen von Himmelskörpern konnte der 1801 entdeckte und gleich wieder aus dem Blick verlorene Planet Ceres wieder aufgefunden werden. Hierbei entwickelte er auch das nach ihm benannte Lösungsverfahren für Gleichungssysteme, das er 1809 in seinem Buch „Theoria motus corporum coelestium" (Theorie der Bewegung der Himmelskörper) veröffentlichte.

B1. Dreieckssysteme

Beispiel: Dreieckssystem

Das gegebene Gleichungssystem hat eine besondere Gestalt, denn die von null verschiedenen Koeffizienten sind in Gestalt eines Dreiecks angeordnet.
Lösen Sie dieses Dreieckssystem.

Ein Dreieckssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 3x & - & 2y & + & 4z & = & 11 \\ \text{II} & & & 4y & + & 2z & = & 14 \\ \text{III} & & & & & 5z & = & 15 \end{array}$$

Lösung:
Dreieckssysteme sind wegen ihrer besonderen Gestalt sehr einfach zu lösen:

1. Wir lösen Gleichung III nach z auf und erhalten z = 3.
2. Dieses Ergebnis setzen wir in Gleichung II ein, die sodann nach y aufgelöst werden kann. Wir erhalten y = 2.
3. Nun setzen wir z = 3 und y = 2 in Gleichung I ein, die anschließend nach x aufgelöst werden kann: x = 1.

Resultat: Das gegebene Dreieckssystem ist ***eindeutig lösbar***.
Die Lösung ist (1; 2; 3).

Lösen eines Dreieckssystems durch ***Rückeinsetzung***:

Auflösen von III nach z:

$$\begin{aligned} 5z &= 15 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Einsetzen in II:
Auflösen nach y:

$$\begin{aligned} 4y + 2z &= 14 \\ 4y + 6 &= 14 \\ 4y &= 8 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Einsetzen in I:
Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 11 \\ 3x - 4 + 12 &= 11 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: L = {(1; 2; 3)}

B2. Der Gaußsche Algorithmus

Im Folgenden zeigen wir das besonders systematische Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme von Gauß, das als Gaußscher Algorithmus oder als Gaußsches Eliminationsverfahren bezeichnet wird. Wegen seiner algorithmischen Struktur ist es hervorragend für die numerische Bearbeitung mittels Computer geeignet.

Die Grundidee von Gauß war sehr einfach: Mit Hilfe von Äquivalenzumformungen (vgl. Abschnitt 1. A) wird das lineare Gleichungssystem in ein Dreieckssystem umgewandelt. Dieses wird anschließend durch „Rückeinsetzung" gelöst.

Beispiel: Dreieckssystem/ Rückeinsetzung

Formen Sie das lineare Gleichungssystem (LGS) in ein Dreieckssystem um und lösen Sie dieses.

$$\begin{array}{lrcr} \text{I} & 3x+3y+2z &=& 5 \\ \text{II} & 2x+4y+3z &=& 4 \\ \text{III} & -5x+2y+4z &=& -9 \end{array}$$

Lösung:

Die außerhalb des blauen Dreiecks stehenden Terme stören auf dem Weg zum Dreieckssystem. Sie sollen durch Äquivalenzumformungen schrittweise eliminiert werden.

Als Darstellungsmittel verwenden wir den Umformungspfeil, der angibt, wodurch die Gleichung ersetzt wird, von welcher dieser Pfeil ausgeht.

1. Wir eliminieren die Variable x aus den Gleichungen II und III.
   Wir erreichen dies, indem wir zu geeigneten Vielfachen dieser Gleichung geeignete Vielfache von Gleichung I addieren oder subtrahieren.
2. Wir eliminieren die Variable y aus der Gleichung III des neu entstandenen Systems in entsprechender Weise.
3. Es ist nun wieder ein Dreieckssystem entstanden, das wir leicht durch „Rückeinsetzung" lösen können.

Umformen des LGS:

1. Elimination von x

$$\begin{array}{lrcrl} \text{I} & 3x+3y+2z &=& 5 & \\ \text{II} & 2x+4y+3z &=& 4 & \to 3\cdot\text{II}-2\cdot\text{I} \\ \text{III} & -5x+2y+4z &=& -9 & \to 3\cdot\text{III}+5\cdot\text{I} \end{array}$$

2. Elimination von y

$$\begin{array}{lrcrl} \text{I} & 3x+3y+\;\;2z &=& 5 & \\ \text{II} & 6y+\;\;5z &=& 2 & \\ \text{III} & 21y+22z &=& -2 & \to 2\cdot\text{III}-7\cdot\text{II} \end{array}$$

Dreieckssystem

$$\begin{array}{lrcr} \text{I} & 3x+3y+2z &=& 5 \\ \text{II} & 6y+5z &=& 2 \\ \text{III} & 9z &=& -18 \end{array}$$

3. Lösen durch Rückeinsetzung

Auflösen von III nach z:

$$9z = -18$$
$$z = -2$$

Einsetzen in II, Auflösen nach y:

$$6y+5z=2$$
$$6y-10=2$$
$$y=2$$

Einsetzen in I, Auflösen nach x:

$$3x+3y+2z=5$$
$$3x+\;6-\;4=5$$
$$x=1$$

Resultat: $L = \{(1;\,2;\,-2)\}$

In entsprechender Weise lassen sich auch lineare Gleichungssysteme mit größerer Anzahl von Gleichungen und Variablen lösen. Es kommt darauf an, die störenden Terme in systematischer Weise, z. B. spaltenweise, zu eliminieren, sodass eine ***Dreiecksform*** bzw. ***Stufenform*** entsteht.

Übungen

1. Rechnerische Lösung

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme rechnerisch.

a) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 3x + 4y &= 16 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 6x - 4y &= -2 \\ 4x + 3y &= 10 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - 2y &= 1 \\ 3x + 4y &= 14 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 5x &= y - 3 \\ 2y &= 7 + 9x \end{aligned}$

2. Lösbarkeit

Untersuchen Sie das Gleichungssystem auf Lösbarkeit. Geben Sie die Lösungsmenge an.

a) $\begin{aligned} 8x - 3y &= 11 \\ 5x + 2y &= 34 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 13 \\ 2x - 5y &= -4 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 8x - 6y &= 2 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} -4x + 14y &= 6 \\ 6x - 21y &= 8 \end{aligned}$

3. Dreiecksform

Lösen Sie das LGS. Formen Sie das LGS ggf. zunächst in ein Dreieckssystem um.

a) $\begin{aligned} 2x + 4y - z &= -13 \\ 2y - 2z &= -12 \\ 3z &= 9 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x + 4y - 3z &= 3 \\ -6y + 5z &= 7 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 3x - 2y + 2z &= 6 \\ 2x - z &= 2 \\ -3x &= -6 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x - 3y + 5z &= -2 \\ y + 2z &= 8 \\ y + z &= 6 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x + y + 4z &= 10 \\ 2y - 5z &= -14 \\ y + 3z &= 4 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 8 \\ -2x + y + 2z &= 3 \\ 4z &= 8 \end{aligned}$

4. Gaußscher Algorithmus

Lösen Sie das LGS mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

a) $\begin{aligned} 4x - 2y + 2z &= 2 \\ -2x + 3y - 2z &= 0 \\ 3x - 5y + z &= -7 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + 2y - 2z &= -4 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x + 2y - 3z &= -7 \\ -x - 2y - 2z &= 3 \\ 4x + y - 2z &= -1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x + y - z &= 6 \\ 5x - 5y + 2z &= 6 \\ 3x + 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 3y + z &= 9 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= -2 \\ x + z &= -1 \\ y + 2z &= -3 \end{aligned}$

5. Gaußscher Algorithmus

Lösen Sie das LGS mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Bringen Sie das LGS zunächst auf Normalform. (Erzeugen Sie zweckmäßigerweise auch ganzzahlige Koeffizienten.)

a) $\begin{aligned} 2y &= 4 - z \\ 3z &= x - 10 \\ 9 + z &= x + y \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2y - 5 &= z + 2x \\ -2z &= x - 2y \\ 4x &= y - 10 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 3z &= 2y + 7 \\ x - 4 &= y + z \\ 2x + 2y &= x - 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{3}{4}z &= 4 \\ \tfrac{3}{2}x - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{2}z &= -2 \\ y - \tfrac{1}{2}z &= 2 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} -0{,}2x + 1{,}5y + 0{,}4z &= -9 \\ 1{,}1x + 2{,}2z &= 8{,}8 \\ 0{,}8x - 0{,}2y &= 4{,}4 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{5}y + \tfrac{2}{3}z &= 7 \\ \tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{10}y + \tfrac{1}{12}z &= \tfrac{5}{2} \\ 4{,}5x - 0{,}5y + \tfrac{1}{3}z &= 17{,}5 \end{aligned}$

6. Zahlenrätsel

Eine dreistellige natürliche Zahl hat die Quersumme 14. Liest man die Zahl von hinten nach vorn und subtrahiert 22, so erhält man eine doppelt so große Zahl. Die mittlere Ziffer ist die Summe der beiden äußeren Ziffern. Berechnen Sie die gesuchte Zahl.

C. Lösung eines LGS mit einem Computerprogramm

Ein Taschenrechner mit erweiterter Funktionalität beherrscht nur lineare Gleichungssysteme mit der Ordnung 3 oder kleiner. Für größere LGS verwendet man ein Computerprogramm (Applet), einen graphischen Taschenrechner (GTR) oder ein Computeralgebrasystem (CAS).
Wir behandeln als Beispiel die Verwendung eines Programms in Gestalt eines Applets.

Beispiel: Lösung von LGS mit einem Computerprogramm

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit einem Computerprogramm.

a) $\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 2 \\ 3x + 2y + z &= 10 \\ 4x + y - z &= 3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x + y + 3z + t &= 6 \\ 4x + 2y + 2z + 2t &= 8 \\ 2x + 2y + 2z + 2t &= 6 \end{aligned}$

Lösung:
Wir rufen das Applet auf der Internetseite* auf und wählen Gleichungssystem. Es erscheint eine rechteckige Maske zur Eingabe der Koeffizienten des LGS. Die Größe der Maske entspricht der Ordnung des LGS und kann eingegeben werden. In unserem Fall kann die Maske mit dem Feld $\boxed{+}$ vergrößert und dem Feld $\boxed{-}$ verkleinert werden.
Nicht benötigte Zeilen/Spalten bleiben einfach leer (siehe Teil b).
Die Berechnung der Lösung wird durch Anklicken des Feldes $\boxed{\text{Lösen}}$ gestartet. Mit dem Feld $\boxed{\text{Löschen}}$ wird alles gelöscht.

1. *Appletoberfläche im Fall a:*

Matrix calculator

2	x_1 +	3	x_2 +	−2	x_3 =	2
3	x_1 +	2	x_2 +	1	x_3 =	10
4	x_1 +	1	x_2 +	−1	x_3 =	3

Zellen | Löschen | + | −

Mit dem Gauß-Verfahren lösen | Löschen

Ergebnis:
○ $x_1 = 1$
○ $x_2 = 2$
○ $x_3 = 3$

Lösung zu a:
Wir erhalten eine eindeutige Lösung:
$x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$

2. *Appletoberfläche im Fall b:*

Matrix calculator

2	x_1+	1	x_2+	3	x_3+	1	x_4=	6
4	x_1+	2	x_2+	2	x_3+	2	x_4=	8
2	x_1+	2	x_2+	2	x_3+	2	x_4=	6
	x_1+		x_2+		x_3+		x_4=	

Zellen | Löschen | + | −

Mit dem Gauß-Verfahren lösen | Löschen

Ergebnis:
○ $x_1 = 1$
○ $x_2 = 1 - x_4$
○ $x_3 = 1$
○ $x_4 = x_4$

Lösung zu b:
Dieses unterbestimmte LGS hat unendlich viele Lösungen, die vom Applet in parametrisierter Form angezeigt werden.
$L = \{(x;\, y;\, z;\, t) : x = 1,\ y = 1 - c,\ z = 1,\ t = c;\ c \in \mathbb{R}\}$

Übung 7 LGS mit einem Computerprogramm lösen

Lösen Sie das Gleichungssystem mit einem Computerprogramm, einem GTR oder einem CAS.

a) $\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 9 \\ 3x + y - 2z &= 8 \\ -x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y - 2z &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x + y + z - 3t &= 4 \\ 4x - y + 4z - 6t &= 8 \\ 3x + 2y - z + 2t &= 6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 6 \\ x + y + 2z &= 12 \\ -x + 3y - z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 2 \end{aligned}$

* Den **Matrix-Calculator** findet man auf: https://matrixcalc.org

D. Lösbarkeitsuntersuchungen

D1. Unlösbare und nicht eindeutig lösbare LGS

Wir untersuchen nun mit dem Gaußschen Algorithmus lineare Gleichungssysteme, die keine Lösung besitzen bzw. die unendlich viele Lösungen haben.

Beispiel: Untersuchen Sie das LGS mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus auf Lösbarkeit.

a) $$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x - y + 2z &= 8 \\ 3x + 11y - 7z &= 6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x + y - 4z &= 1 \\ 3x + 2y - 7z &= 1 \\ 4x - 3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

Lösung zu a:

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & x + 2y - z = 3 & \\ \text{II} & 2x - y + 2z = 8 & \to \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} & 3x + 11y - 7z = 6 & \to \text{III} - 3 \cdot \text{I} \\ \hline \text{I} & x + 2y - z = 3 & \\ \text{II} & -5y + 4z = 2 & \\ \text{III} & 5y - 4z = -3 & \to \text{III} + \text{II} \\ \hline \text{I} & x + 2y - z = 3 & \\ \text{II} & 5y - 4z = -2 & \\ \text{III} & 0 = -1 & \\ & \uparrow \text{Widerspruchszeile} & \end{array}$$

Gleichung III des Dreieckssystems wird als ***Widerspruchszeile*** bezeichnet. Sie ist unlösbar ($0x + 0y + 0z = -1$ ist für **kein** Tripel $(x; y; z)$ erfüllt).

Damit ist das Dreieckssystem als Ganzes unlösbar.
Es folgt: Das ursprüngliche LGS ist ebenfalls ***unlösbar***, die Lösungsmenge ist daher leer: $L = \{\}$.

Die Unlösbarkeit eines LGS wird nach Anwendung des Gaußschen Algorithmus stets auf diese Weise offenbar:

Wenigstens in einer Gleichung des resultierenden Dreieckssystems tritt ein offensichtlicher Widerspruch auf.

Lösung zu b:

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 2x + y - 4z = 1 & \\ \text{II} & 3x + 2y - 7z = 1 & \to 2 \cdot \text{II} - 3 \cdot \text{I} \\ \text{III} & 4x - 3y + 2z = 7 & \to \text{III} - 2 \cdot \text{I} \\ \hline \text{I} & 2x + y - 4z = 1 & \\ \text{II} & y - 2z = -1 & \\ \text{III} & -5y + 10z = 5 & \to \text{III} + 5 \cdot \text{II} \\ \hline \text{I} & 2x + y - 4z = 1 & \\ \text{II} & y - 2z = -1 & \\ \text{III} & 0 = 0 & \\ & \uparrow \text{Nullzeile} & \end{array}$$

Gleichung III des Gleichungssystems wird als ***Nullzeile*** bezeichnet. Sie ist für jedes Tripel $(x; y; z)$ erfüllt, stellt keine Einschränkung dar und kann daher auch weggelassen werden.

Es verbleiben 2 Gleichungen mit 3 Variablen, von denen daher eine Variable frei wählbar ist. Wir setzen für diese „überzählige“ Variable einen Parameter ein.

Wählen wir $z = c \quad (c \in \mathbb{R})$,
so folgt aus II $y = 2c - 1$
und dann aus I $x = c + 1$.

Wir erhalten für jeden Wert des freien Parameters c genau ein Lösungstripel $(x; y; z)$. Das Gleichungssystem hat eine ***einparametrige unendliche Lösungsmenge***:
$L = \{(c + 1; 2c - 1; c);\ c \in \mathbb{R}\}$.

Übung 8 Lösbarkeitsuntersuchung

Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 4x + 3y + z &= 8 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x + 5y - 2z &= 10 \\ 2x + 8y - 5z &= 6 \\ 4x + 2y + z &= 8 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4x - 3y - 5z &= 9 \\ 2x + 5y - 9z &= 11 \\ 6x - 11y - z &= 7 \end{aligned}$

D2. Unter- und überbestimmte LGS

Alle bisher durchgeführten Überlegungen zur Lösbarkeit bezogen sich auf den Sonderfall, dass die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Variablen übereinstimmt. Im Folgenden zeigen wir exemplarisch, dass sie jedoch sinngemäß für jedes beliebige LGS gelten.
Enthält ein LGS weniger Gleichungen als Variablen, so reichen die Informationen für eine eindeutige Lösung nicht aus, d.h., es ist ***unterbestimmt***. Enthält ein LGS hingegen mehr Gleichungen als Variablen, so würden für eine eindeutige Lösung bereits weniger Gleichungen genügen. In diesem Fall ist das LGS ***überbestimmt***. Wir zeigen die Vorgehensweisen bei derartigen LGS an zwei Beispielen.

Beispiel: Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\begin{aligned} \text{I} \quad x + 2y + 3z &= 8 \\ \text{II} \quad 2x + 3y + 2z &= 9 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 8 \\ x - 2y &= 5 \end{aligned}$

Lösung zu a:

$$\begin{array}{llr} \text{I} & x + 2y + 3z = 8 & \\ \text{II} & 2x + 3y + 2z = 9 & \rightarrow 2 \cdot \text{I} - \text{II} \\ \hline \text{I} & x + 2y + 3z = 8 & \\ \text{II} & y + 4z = 7 & \\ \hline \end{array}$$

Das LGS ist unterbestimmt. Da die Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf keinen Widerspruch führt, besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
Da das LGS in Stufenform nur zwei Gleichungen enthält, aber drei Variable vorhanden sind, ersetzen wir die überzählige Variable z durch den Parameter c: $z = c$.
Aus II folgt dann: $y + 4c = 7$, $y = 7 - 4c$
Durch Einsetzen in I erhalten wir nun
$x + 2(7 - 4c) + 3c = 8$, d.h. $x = -6 + 5c$.
Das LGS hat also die einparametrige unendliche Lösungsmenge:
$L = \{(-6 + 5c;\ 7 - 4c;\ c);\ c \in \mathbb{R}\}$

Lösung zu b:

$$\begin{array}{llr} \text{I} & x + y = 1 & \\ \text{II} & 2x - y = 8 & \rightarrow (-2) \cdot \text{I} + \text{II} \\ \text{III} & x - 2y = 5 & \rightarrow \text{I} - \text{III} \\ \hline \text{I} & x + y = 1 & \\ \text{II} & -3y = 6 & \\ \text{III} & 3y = -4 & \rightarrow \text{II} + \text{III} \\ \hline \text{I} & x + y = 1 & \\ \text{II} & -3y = 6 & \\ \text{III} & 0 = 2 & \text{Widerspruch} \\ \hline \end{array}$$

Wendet man den Gaußschen Algorithmus an, erhält man die obige ***Stufenform***. Da die Gleichung III einen Widerspruch enthält, ist das gesamte LGS unlösbar, obwohl das Teilsystem aus den ersten beiden Gleichungen eine eindeutige Lösung ($x = 3$; $y = -2$) besitzt. Diese erfüllt jedoch die Gleichung III nicht. Somit erhalten wir als Resultat:
$L = \{\ \}$.

Übung 9 Lösbarkeitsuntersuchung/Lösungsmenge

Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $$\begin{aligned} 3x - 3y &= 0 \\ 6x + 3y &= 18 \\ -2x + 4y &= 4 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -2x + y &= -1 \\ 4x + 2y &= -10 \\ -6x + 3y &= -2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x - 2y &= 14 \\ 3x + 6y &= 3 \\ 4x - 12y &= 44 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 3x - 4y + z &= 5 \\ 2x - y - z &= 0 \\ 4x - 2y - z &= 12 \\ x - y + z &= 10 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x + z &= -1 \\ y + z &= 4 \\ x + y &= 5 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 4x + y - 2z + t &= 1 \\ 2x + y + 3z - 2t &= 3 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5 \\ -6x - 4y - 2z &= 8 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 2x + 3z + 2t &= 4 \\ y + 3z + 2t &= 4 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} 2x - 4y + 2z &= 6 \\ x - 8y + 4z &= 12 \\ -x + 2y - z &= -3 \end{aligned}$$

Die Lösbarkeitsuntersuchungen haben gezeigt, dass Nullzeilen (triviale Zeilen) noch nichts über die Lösbarkeit des gesamten LGS aussagen, während aus einer Widerspruchszeile sofort die Unlösbarkeit des gesamten LGS folgt. Wir können zusammenfassend folgendes Lösungsschema zum Gaußschen Algorithmus angeben:

<table>
<tr><th colspan="4">Lösungsschema des Gaußschen Algorithmus</th></tr>
<tr><td>1.</td><td colspan="3">LGS in die Normalform überführen,
ganzzahlige Koeffizienten erzeugen, sofern möglich.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td colspan="3">Gaußschen Algorithmus auf das LGS anwenden. Es entsteht eine Dreiecks- bzw. Stufenform.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.</td><td colspan="3">Prüfen, welche der folgenden Eigenschaften das aus 2. resultierende LGS besitzt.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Widerspruch

Wenigstens eine Gleichung stellt einen offensichtlichen Widerspruch dar.</td><td colspan="2">Es existiert kein Widerspruch.</td></tr>
<tr><td>Die Anzahl der Variablen ist gleich der Anzahl der nichttrivialen Zeilen.</td><td>Es gibt mehr Variable als nichttriviale Zeilen.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4.</td><td>Das LGS ist
unlösbar.</td><td>Das LGS ist
eindeutig lösbar.</td><td>Das LGS hat
unendlich viele Lösungen.</td></tr>
<tr><td></td><td>Die einzige Lösung wird durch „Rückeinsetzung“ aus dem Stufenform-LGS bestimmt.</td><td>Die freien Parameter werden festgelegt.
Die Parameterdarstellung der Lösungsmenge wird bestimmt.</td></tr>
</table>

2. Geradengleichungen

Im dreidimensionalen Anschauungsraum können Geraden besonders einfach mit Hilfe von Vektoren dargestellt werden. Diese Darstellung ist auch in der zweidimensionalen Zeichenebene möglich, jedoch lassen sich Geraden in der Ebene auch z.B. durch die bekannte lineare Funktionsgleichung erfassen.

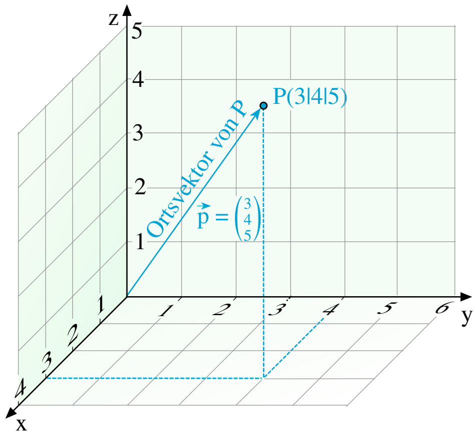
A. Ortsvektoren

Die Lage eines beliebigen Punktes in einem ebenen oder räumlichen Koordinatensystem kann eindeutig durch denjenigen Pfeil $\overrightarrow{OP}$ erfasst werden, der im Ursprung O des Koordinatensystems beginnt und im Punkt P endet.

Der Pfeil $\overrightarrow{OP}$ heißt ***Ortspfeil*** von P und der zugehörige Vektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ wird als der ***Ortsvektor*** von P bezeichnet.

Der Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ besitzt den Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$.

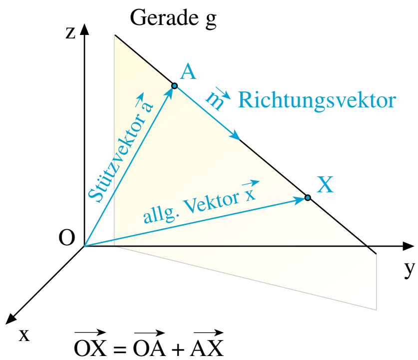
Entsprechendes gilt für Punkte in einem ebenen Koordinatensystem.



B. Die vektorielle Parametergleichung einer Geraden

Die Lage einer Geraden in der zweidimensionalen Zeichenebene oder im dreidimensionalen Anschauungsraum kann durch die Angabe eines Geradenpunktes A sowie der Richtung der Geraden eindeutig erfasst werden.

Die Lage des Punktes A kann durch seinen Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ festgelegt werden, den man als ***Stützvektor*** der Geraden bezeichnet.
Die Richtung der Geraden lässt sich durch einen zur Geraden parallelen Vektor $\vec{m}$ erfassen, den man als ***Richtungsvektor*** der Geraden bezeichnet.



$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$$

$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m}$$

Jeder beliebige Geradenpunkt X lässt sich mit Hilfe des Stützvektors $\vec{a}$ und des Richtungsvektors $\vec{m}$ erfassen.
Für den Ortsvektor $\vec{x}$ von X gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \overrightarrow{OX}\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}\\ &= \vec{a} + r \cdot \vec{m} \quad (r \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

denn $\overrightarrow{AX}$ ist ein reelles Vielfaches von $\vec{m}$.
Jedem Geradenpunkt X entspricht eindeutig ein Parameterwert r.

Die vektorielle Parametergleichung einer Geraden

Eine Gerade mit dem Stützvektor $\vec{a}$ und dem Richtungsvektor $\vec{m} \neq \vec{0}$ hat die Gleichung

$$g\colon \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m} \quad (r \in \mathbb{R}).$$

r heißt ***Geradenparameter***.

Mit Hilfe der Parametergleichung einer Geraden kann man zahlreiche Problemstellungen relativ einfach lösen.

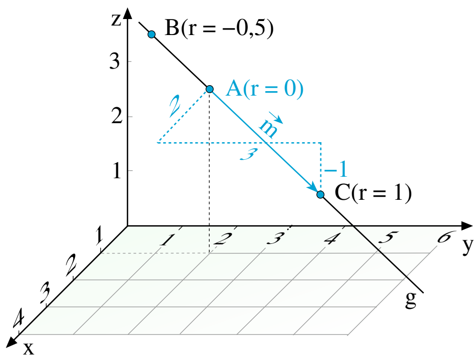
Beispiel: Schrägbild

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie die Gerade als Schrägbild. Stellen Sie fest, welche Geradenpunkte den Parameterwerten r = 0, r = –0,5 und r = 1 entsprechen.

Lösung:
Wir zeichnen den Stützpunkt A (1|2|3) oder den Stützvektor $\vec{a}$ ein. Im Stützpunkt legen wir den Richtungsvektor $\vec{m}$ an.

Für r = 0 erhalten wir den Stützpunkt A (1|2|3). Für r = –0,5 erhalten wir den Geradenpunkt B (0|0,5|3,5), der „vor“ dem Stützpunkt liegt. Für r = 1 erhalten wir den Punkt C (3|5|2), der am Ende des eingezeichneten Richtungspfeils liegt.



Beispiel: Geradenparameter

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

a) Welche Werte des Parameters r gehören zu den Geradenpunkten P (2|3,5|2,5) und Q (5|8|1)?
b) Begründen Sie, weshalb der Punkt R (3|5|1) nicht auf der Geraden liegt.

Lösung zu a:
Um r zu bestimmen, ersetzen wir $\vec{x}$ in der Gleichung durch den Ortsvektor von P bzw. von Q und berechnen r.
Für r = 0,5 ergibt sich der Geradenpunkt P (2|3,5|2,5). Für r = 2 ergibt sich der Geradenpunkt Q (5|8|1).

Lösung zu b:
Die x-Koordinate des Punktes R erfordert r = 1, ebenso die y-Koordinate.
Die z-Koordinate erfordert r = 2. Beides ist nicht vereinbar. Der Punkt R liegt nicht auf der Geraden g.

Übung 1 Punkt und Gerade

Zeichnen Sie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ im Schrägbild.

Überprüfen Sie, ob die Punkte P(4|9|3), Q(1|6|4) und R(−5|0|0) auf der Geraden g liegen. Beschreiben Sie ggf. ihre Lage auf der Geraden anschaulich.

Übung 2 Lage einer Geraden

Zeichnen Sie die Geraden und beschreiben Sie die Lage der Geraden.

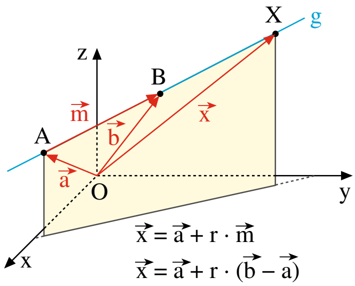
a) g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ b) g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ c) g_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

C. Die Zweipunktegleichung einer Geraden

In der Praxis ist eine Gerade meistens durch zwei feste Punkte A und B gegeben, deren Ortsvektoren $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ sind.

In diesem Fall kann man die vektorielle Geradengleichung sehr einfach aufstellen. Als Stützvektor verwendet man den Ortsvektor eines der beiden Punkte, also z. B. $\vec{a}$. Der Verbindungsvektor $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$ der beiden Punkte dient als Richtungsvektor.

Da $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$ sich als Differenz $\vec{b} - \vec{a}$ der beiden Ortsvektoren von B und A darstellen lässt, erhält man die rechts aufgeführte vektorielle ***Zweipunktegleichung*** der Geraden.



Die Zweipunktegleichung

Die Gerade g durch die Punkte A und B mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ hat die Gleichung
g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ $(r \in \mathbb{R})$.

Beispielsweise hat die Gerade g durch die Punkte A(1|2|1) und B(3|4|3) die Zweipunktegleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\left(\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$, die zur Parametergleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ vereinfacht werden kann.

Übung 3 Geradengleichung

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B.

a) A(3|3), B(2|1) b) A(−3|1|0), B(4|0|2) c) A(−3|2|1), B(4|1|7)

Übung 4 Geradengleichung

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt P(3|2|0).

b) Bestimmen Sie die Gleichung einer Ursprungsgeraden durch den Punkt P(a|2a|−a) (a ≠ 0).

Übungen

5. Schrägbild

Zeichnen Sie die Gerade g durch den Punkt A(2|6|4) mit dem Richtungsvektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in ein räumliches Koordinatensystem ein.

6. Geradengleichung

Gesucht ist eine vektorielle Gleichung der Geraden durch die Punkte A und B.

a) A (1|2|0)
B (3|−4|0)

b) A (−3|2|1)
B (3|1|2)

c) A (3|3|−4)
B (2|1|3)

d) A $(a_1|a_2|a_3)$
B $(b_1|b_2|b_3)$

7. Punkt und Gerade

Untersuchen Sie, ob der Punkt P auf der Geraden liegt, die durch A und B geht.

a) A (3|2|0)
B (−1|4|0)
P (1|3|0)

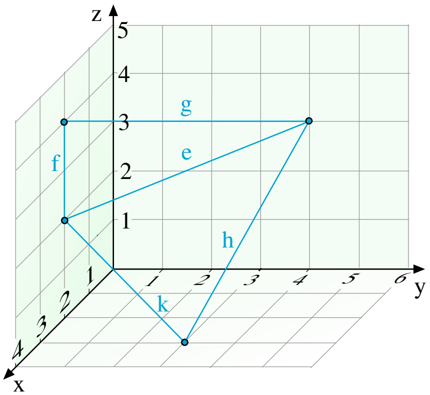
b) A (2|7|0)
B (5|4|0)
P (8|3|0)

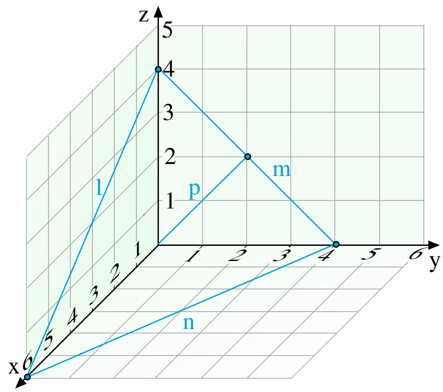
c) A (1|4|3)
B (3|2|4)
P (7|−2|6)

d) A (1|1|1)
B (3|4|1)
P (0|0|0)

8. Zuordnung

Ordnen Sie den abgebildeten Geraden die zugehörigen vektoriellen Gleichungen zu.





I: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

II: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

III: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

IV: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

V: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

VI: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

VII: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

VIII: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

IX: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. Geradengleichung

a) Gesucht ist die Gleichung einer zur y-Achse parallelen Geraden g, die durch den Punkt A (3|2|0) geht.

b) Gesucht ist die Gleichung einer Ursprungsgeraden durch den Punkt P (2|4|−2).

c) Gesucht ist die vektorielle Gleichung der Winkelhalbierenden der x-z-Ebene.

D. Geraden in der Ebene

Geraden im zweidimensionalen Anschauungsraum können sowohl mit einer vektorfreien ***Koordinatengleichung*** als auch mit einer vektoriellen ***Parametergleichung*** erfasst werden.

Beispiel: Koordinatengleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$

Die Gerade g durch die Punkte A(2|4) und B(4|3) soll durch eine vektorfreie Koordinatengleichung der Gestalt $y = mx + n$ bzw. $ax + by = c$ erfasst werden.
Stellen Sie diese Gleichung auf.

Lösung:
Wir setzen die Koordinaten der Punkte A(2|4) und B(4|3) in den Ansatz $y = mx + n$ ein und erhalten folgende Gleichungen:
I: $2m + n = 4$
II: $4m + n = 3$
Durch die Subtraktion I − II eliminieren wir n und erhalten $-2m = 1$, d.h. $m = -\frac{1}{2}$.
Durch Rückeinsetzung in I folgt $n = 5$.
Die Geradengleichung lautet daher:
$y = -\frac{1}{2}x + 5$ bzw. $x + 2y = 10$.

Koordinatengleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$

Eine Gerade im zweidimensionalen Anschauungsraum kann durch folgende Gleichungen erfasst werden:

Funktionsgleichung: $y = mx + n$
Koordinatengleichung: $ax + by = c$

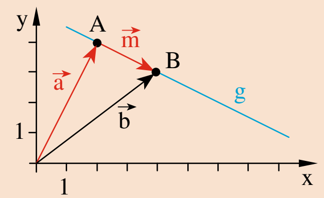
Beispiel: Vektorielle Parametergleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$

Die Gerade g durch die Punkte A(2|4) und B(4|3) soll durch eine vektorielle Parametergleichung dargestellt werden. Stellen Sie diese auf.

Lösung:
Ein Stützvektor von g ist der Ortsvektor des Punktes A, also $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Ein Richtungsvektor von g ergibt sich als Differenz der Ortsvektoren von B und A:
$\vec{m} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Als ***Punktrichtungsgleichung*** ergibt sich:
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Als ***Zweipunktegleichung*** sei notiert:
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.

Vektorielle Parametergleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$

g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m} \quad (r \in \mathbb{R})$
g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \quad (r \in \mathbb{R})$



Übung 10 **Geradengleichungen**
Bestimmen Sie sowohl eine Koordinatengleichung als auch eine vektorielle Parametergleichung der Geraden g durch die Punkte A(−1|2) und B(5|5).

Die Koordinatengleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ kann man in einer speziellen Form darstellen, bei welcher die rechte Seite auf den Wert 1 normiert ist (vgl. rechts).
Die Nennerzahlen der linken Seite geben dann exakt die beiden Achsenabschnitte der Geraden an. Daher spricht man von der ***Achsenabschnittsgleichung*** der Geraden. Mit ihrer Hilfe kann man eine sehr übersichtliche Skizze der Geraden anfertigen.

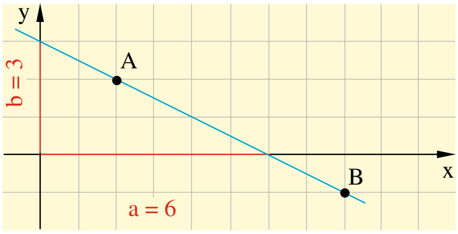
Achsenabschnittsgleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$

Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, die nicht achsenparallel verläuft, kann durch die sog. **Achsenabschnittsgleichung** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ dargestellt werden. Dabei gilt:

a ist der x-Achsenabschnitt von g,
b ist der y-Achsenabschnitt von g.

Beispiel: Achsenabschnittsgleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$
Stellen Sie die Achsenabschnittsgleichung der Geraden durch die Punkte A (2|2) und B (8|–1) auf und skizzieren Sie die Gerade.

Lösung:
Wir verwenden den Ansatz $y = mx + n$. Er führt analog zum Beispiel auf Seite 98 zu der Geradengleichung $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
Diese formen wir um zur Koordinatenform $x + 2y = 6$ und normieren schließlich zur Achsenabschnittsform $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$.
Dieser können wir sofort die Achsenabschnitte $a = 6$ und $b = 3$ entnehmen.

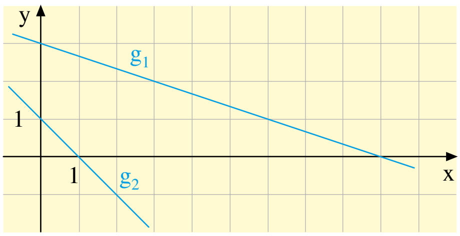


Übung 11 Koordinatengleichung
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Geraden g durch die Punkte A und B und skizzieren Sie die Gerade.
a) A (1|2), B (5|5) b) A (4|–5), B (–2|5) c) A (2|3), B (6|3)

Übung 12 Vektorielle Geradengleichung
Bestimmen Sie eine vektorielle Parametergleichung der Geraden g aus Übung 11.

Übung 13 Achsenabschnittsgleichung
Bestimmen Sie die Achsenabschnittsgleichung der Geraden $y = \frac{2}{5}x + 2$ und fertigen Sie eine Skizze an.

Übung 14 Lagebeziehung von Geraden
a) Stellen Sie eine vektorielle Parametergleichung von g_1 auf.
b) Zeigen Sie, dass die Punkte A (3|2) und B (–6|5) auf der Geraden g_1 liegen.
c) Bestimmen Sie Achsenabschnittsgleichungen von g_1 und g_2.
d) Wo liegt der Schnittpunkt der Geraden?



3. Lagebeziehungen

A. Gegenseitige Lage Punkt/Gerade und Punkt/Strecke

Mit Hilfe der Parametergleichung einer Geraden lässt sich einfach überprüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Geraden liegt und an welcher Stelle der Geraden er gegebenenfalls liegt.

Beispiel: Gegeben sei die Gerade g durch A (3|2|3) und B (1|6|5). Weisen Sie nach, dass der Punkt P (2|4|4) auf der Geraden g liegt.

Prüfen Sie außerdem, ob der Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

Lösung:

Mit der Zweipunkteform erhalten wir die Parametergleichung von g.

Parametergleichung von g:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$$

Wir führen die Punktprobe für den Punkt P durch, indem wir seinen Ortsvektor in die Geradengleichung einsetzen.
Sie ist erfüllt für den Parameterwert r = 0,5.
Also liegt der Punkt P auf der Geraden g.

Punktprobe für P:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ gilt für } r = 0{,}5$$

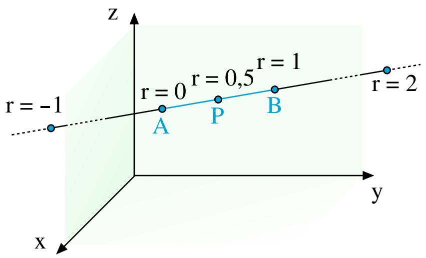
$\Rightarrow$ P liegt auf g.

Nun führen wir einen Parametervergleich durch. Die Streckenendpunkte A und B besitzen die Parameterwerte r = 0 und r = 1. Der Parameterwert von P (r = 0,5) liegt zwischen diesen Werten. Also liegt der Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$, und zwar genau auf der Mitte der Strecke.

Parametervergleich:
A: r = 0
B: r = 1
P: r = 0,5

$\Rightarrow$ P liegt auf $\overline{AB}$.

Rechts sind die Ergebnisse zeichnerisch dargestellt.
Das Bild macht deutlich, dass durch den Geradenparameter auf der Geraden ein *internes Koordinatensystem* festgelegt wird, anhand dessen man sich orientieren kann.

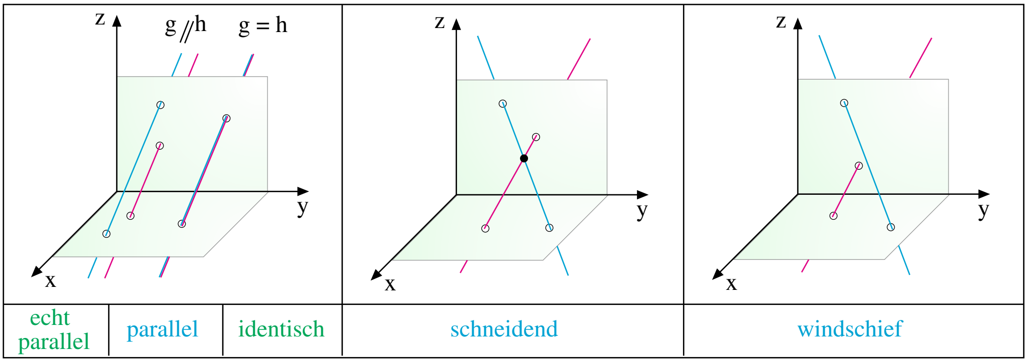


Übung 1 Punktprobe

a) Prüfen Sie, ob die Punkte P (0|0|6), Q (3|3|3), R (3|4|3) auf der Geraden g durch A (2|2|4) und B (4|4|2) oder sogar auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen.
b) Berechnen Sie, für welchen Wert von t P (4 + t|5t|t) auf der Geraden g durch A (2|2|4) und B (4|4|2) liegt.

B. Gegenseitige Lage von zwei Geraden im Raum

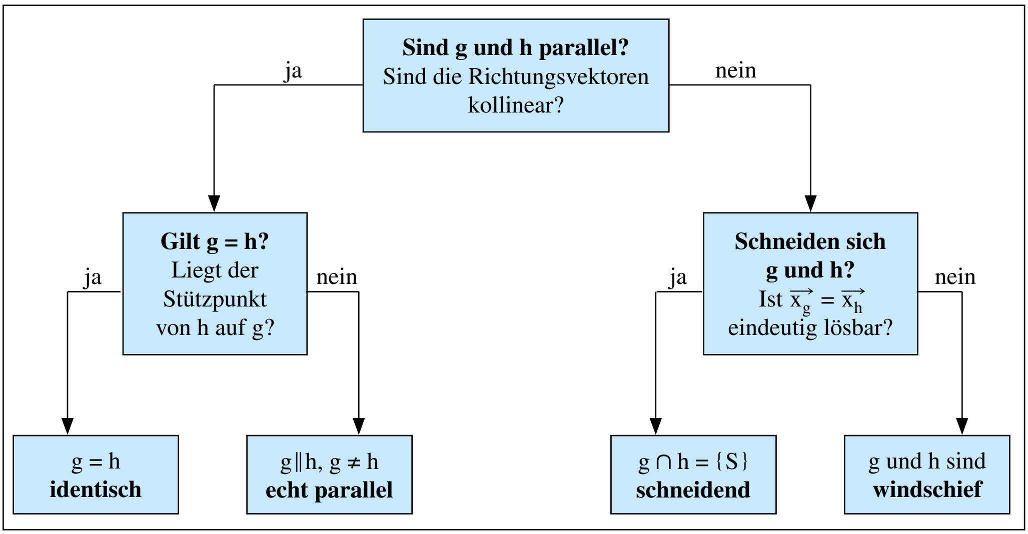
Zwischen zwei Geraden im Raum sind drei charakteristische Lagebeziehungen möglich. Sie können parallel sein (Unterfälle echt parallel bzw. identisch), sie können sich in einem Punkt schneiden oder sie sind windschief. Als ***windschief*** bezeichnet man zwei Geraden, die weder parallel sind noch sich schneiden.



Zeichnerisch lässt sich die gegenseitige Lage von zwei Geraden im Raum oft nur schwer einschätzen, aber mit Hilfe der Geradengleichungen ist die rechnerische Überprüfung möglich.

Untersuchungsschema für die Lage von zwei Raumgeraden:

g: $\vec{x}_g = \vec{a} + r \cdot \vec{m}_g$ und h: $\vec{x}_h = \vec{b} + s \cdot \vec{m}_h$ seien die Gleichungen von zwei Raumgeraden. Anhand der beiden Richtungsvektoren kann man überprüfen, ob g und h parallel sind. Die Geraden g und h sind nämlich genau dann parallel, wenn ihre Richtungsvektoren kollinear sind. Ist dies nicht der Fall, dann setzt man die beiden Geradenvektoren $\vec{x}_g$ und $\vec{x}_h$ gleich. Ist das zugehörige Gleichungssystem eindeutig lösbar, schneiden sich g und h in einem Punkt S. Andernfalls sind g und h windschief.



Beispiel: Parallele Geraden

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\6\\3\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\12\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-8\\-4\end{pmatrix}$.

Welche relative Lage zueinander nehmen die Geraden g und h ein?

Lösung:
Die Richtungsvektoren $\vec{m}_g$ und $\vec{m}_h$ der Geraden sind kollinear. $\vec{m}_h$ ist ein Vielfaches von $\vec{m}_g$. Es gilt nämlich $\vec{m}_h = -\frac{4}{3} \cdot \vec{m}_g$. Die Geraden sind also parallel.
Eine Punktprobe zeigt, dass der Stützpunkt P(0|12|4) von h nicht auf g liegt. Also sind die Geraden nicht identisch, sondern echt parallel.

Parallelitätsuntersuchung:

$$\vec{m}_h = \begin{pmatrix}4\\-8\\-4\end{pmatrix} = -\frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\3\end{pmatrix} = -\frac{4}{3} \cdot \vec{m}_g$$

Punktprobe:

$$\begin{array}{rl} 0 = 3 - 3r & r = 1 \\ 12 = 0 + 6r & \Rightarrow r = 2 \Rightarrow \text{Wid.} \\ 4 = 1 + 3r & r = 1 \end{array}$$

Beispiel: Schneidende Geraden

Die Gerade g geht durch die Punkte P(0|0|6) und Q(8|12|2). Die Gerade h geht durch A(4|0|2) und B(4|12|6). Untersuchen Sie die relative Lage von g und h. Skizzieren Sie die Situation.

Lösung:
Wir stellen zunächst die vektoriellen Parametergleichungen von g und h auf, indem wir die Zweipunkteform anwenden.

Nun betrachten wir die Richtungsvektoren. Man erkennt auf den ersten Blick ohne Rechnung, dass sie nicht kollinear sind. Daher sind g und h weder parallel noch identisch.

Wir setzen nun die allgemeinen Geradenvektoren von g und h gleich, d.h. $\vec{x}_g = \vec{x}_h$. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen r und s.

Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{2}$. Daher schneiden sich die Geraden. Der Schnittpunkt lautet S(4|6|4).

Durch die Verwendung von stützenden Ebenen für die Geraden wird deren graphischer Verlauf besonders deutlich und die räumliche Übersicht erhöht.

Parametergleichungen:

$$g: \vec{x}_g = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}8\\12\\-4\end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x}_h = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\12\\4\end{pmatrix}$$

Schnittuntersuchung:

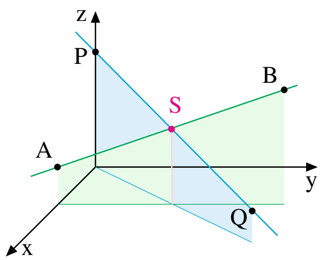
$$\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}8\\12\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\12\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 8r = 4 \\ \text{II} & 12r = 12s \\ \text{III} & 6 - 4r = 2 + 4s \end{array}$$

aus I: $r = \frac{1}{2}$

in II: $s = \frac{1}{2} \Rightarrow S(4|6|4)$

in III: $4 = 4$



Beispiel: Windschiefe Geraden

Untersuchen Sie die relative Lage von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$.

Lösung:
g und h sind nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren nicht kollinear sind, was man durch einfaches Hinsehen erkennen kann.

Wir führen durch Gleichsetzen der rechten Seiten der beiden Geradengleichungen eine Schnittuntersuchung durch, die auf einen Widerspruch führt. Das zugeordnete Gleichungssystem ist unlösbar. Die Geraden schneiden sich also nicht, es verbleibt nur noch eine Möglichkeit:
Die Geraden g und h sind windschief.

Schnittuntersuchung:

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2 + r &=& 1 + 2s \\ \text{II} & r &=& 2s \\ \text{III} & -2r &=& -3s \end{array}$$

I–II: $2 = 1$ Widerspruch

$\Rightarrow$ g und h sind windschief

Übung 2 Lagebeziehung

Gesucht ist die relative Lage von g und h.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\7\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

Übung 3 Parallele Geraden

Welche der Geraden sind parallel, welche schneiden sich?

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix}$

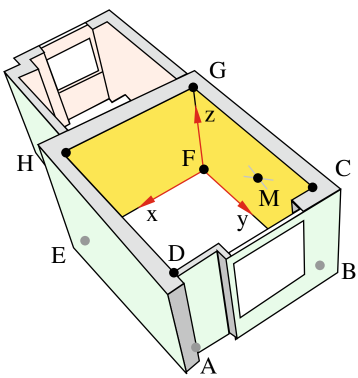
Gerade u durch C(2|−2|3) und D(−2|0|1),

Gerade v durch E(2|0|0) und F(0|3|3).

Übung 4 Raumgeraden

Ein Raum ist 8 m tief, 6 m breit und 4 m hoch.

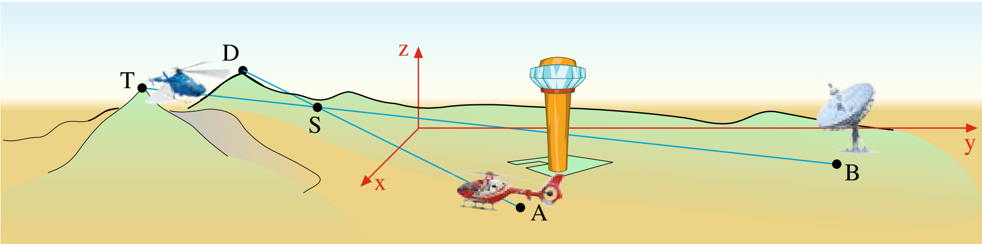
a) Wie lauten die vektoriellen Geradengleichungen der Raumdiagonalen g_{AG} und g_{BH}?
b) Untersuchen Sie, welche relative Lage g_{AG} und g_{BH} zueinander einnehmen.
c) M ist der Mittelpunkt der rechten Wand BCGF.
Welche Lage nehmen die Geraden h_{AM} und g_{BH} zueinander ein?



Mit Hilfe der Lagebeziehungsuntersuchung für Geraden im Raum können einfache Anwendungsprobleme modellhaft gelöst werden, z. B. Flugbahnprobleme.

Beispiel: Flugbahnen

Der Rettungshubschrauber Alpha startet um 10:00 Uhr vom Stützpunkt Adlerhorst A(10|6|0). Er fliegt geradlinig mit einer Geschwindigkeit von 300 km/h zum Gipfel des Mount Devil D(4|−3|3), wo sich der Unfall ereignet hat. Die Koordinaten sind in Kilometern angegeben. Zeitgleich hebt der Hubschrauber Beta von der Spitze des Tempelbergs T(7|−8|3) ab, um Touristen nach B(4|16|0) zurückzubringen. Seine Geschwindigkeit beträgt 350 km/h.



a) Zeigen Sie, dass sich die beiden Hubschrauber auf Kollisionskurs befinden.
b) Untersuchen Sie, ob die Hubschrauber tatsächlich kollidieren.

Lösung zu a:
Wir stellen die Flugbahngleichungen mit Hilfe der Zweipunkteform auf.
Anschließend untersuchen wir, ob die beiden Bahnen sich schneiden.
Wir erhalten einen Schnittpunkt S(6|0|2). Die Hubschrauber befinden sich also auf Kollisionskurs.

Gleichungen der Flugbahnen:

$$\alpha: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\beta: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 24 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Flugbahnen:

Für $r = \frac{2}{3}$ und $s = \frac{1}{3}$ ergibt sich der Schnittpunkt S(6|0|2).

Lösung zu b:
Wir errechnen zunächst die Länge der Flugstrecken der Hubschrauber bis zum Schnittpunkt, d. h. die Beträge der beiden Vektoren $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{TS}$.
Dividieren wir diese Strecken durch die zugehörigen Hubschraubergeschwindigkeiten, so erhalten wir die Flugzeiten bis zum Schnittpunkt in Stunden, die wir in Minuten umrechnen.
Hubschrauber Alpha ist 0,11 Minuten später am möglichen Kollisionspunkt als Hubschrauber Beta. Dieser ist dann schon ca. 640 m weitergeflogen. Es kommt daher nicht zu einer Kollision.

Flugstrecken bis zum Schnittpunkt:

$$|\overrightarrow{AS}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{56} \approx 7{,}48\,\text{km}$$

$$|\overrightarrow{TS}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{66} \approx 8{,}12\,\text{km}$$

Flugzeiten bis zum Schnittpunkt:

$$t_{\text{Alpha}} = \frac{7{,}48}{300}\,\text{h} \approx 0{,}025\,\text{h} \approx 1{,}50\,\text{min}$$

$$t_{\text{Beta}} = \frac{8{,}12}{350}\,\text{h} \approx 0{,}023\,\text{h} \approx 1{,}39\,\text{min}$$

Übungen

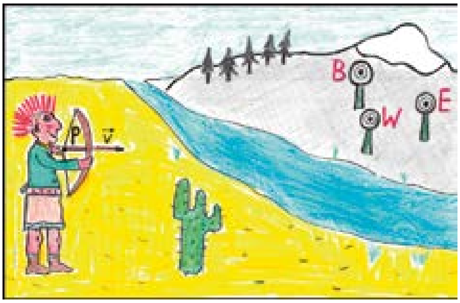
5. Bogenschießen

Ein Bogenschütze zielt vom Punkt $P(0|0|15)$ in Richtung des Vektors $\vec{v}$, um eine der drei im Bergland aufgestellten Scheiben zu treffen.

1 LE = 1 dm

a) Welche Scheibe trifft er? Wie lang ist die Flugbahn? Welche Geschwindigkeit hat der Pfeil, wenn der Flug eine Sekunde dauert?

b) In welche Richtung $\vec{w}$ muss der Schütze zielen, um die Elchscheibe zu treffen?



Bär $(-155|465|85)$
Wolf $(-155|465|92{,}5)$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$
Elch $(-160|640|95)$

6. Motorradstunt

Ein Drahtseilartist plant, mit einem Motorrad vom Startpunkt $A(20|20|0)$ auf den Turm der Stadtkirche zum Punkt $B(220|420|80)$ zu fahren (1 LE = 1 m). Das Fahrseil soll durch drei senkrechte Masten mit den Spitzen $S_1(70|120|20)$, $S_2(120|220|30)$ und $S_3(170|300|60)$ gestützt werden.

a) Sind die Masten als Stützen geeignet? Können Sie ggf. durch Kürzen oder Verlängern passend gemacht werden?

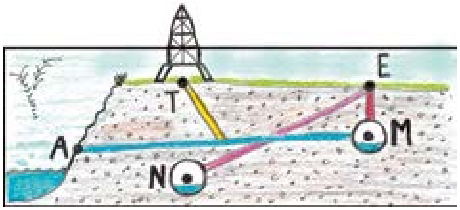
b) Wie lange dauert der Stunt, wenn das Motorrad mit 20 km/h fährt?

c) Unter welchem Winkel steigt das Fahrseil an?

7. Wasserspeicher

An den Positionen M und N befinden sich zwei Wasserspeicher. Ein Überlaufkanal k führt von M nach A. Vom Oberflächenpunkt T wird eine Belüftungsbohrung b in Richtung des Vektors $\vec{v}$ vorgetrieben. Außerdem ist eine Versorgungsleitung g vom Oberflächenpunkt E, der senkrecht über M liegt, zum Speicher N geplant.

1 LE = 100 m



$M(8|12|-6)$, $N(14|2|-10)$
$A(11|0|-9)$, $T(8|2|0)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

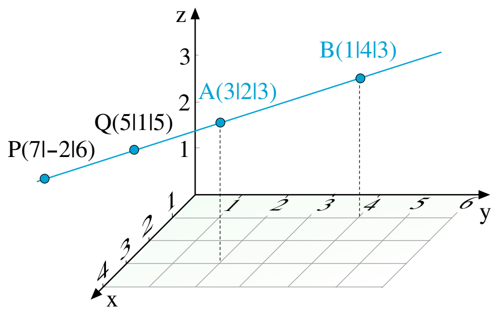
Trifft die Belüftungsbohrung b den Überlaufkanal k? Wie lang muss der Bohrer sein? Zeigen Sie, dass die Versorgungsleitung g weder k noch b trifft. Wie lange dauert das Bohren von g bei einem Vortrieb von 20 cm/min?

8. Punktprobe
Prüfen Sie, ob die Punkte P und Q auf der Geraden g durch A und B liegen.

a) A(0|0|5) P(3|6|2)
B(1|2|4) Q(4|8|0)

b) A(6|3|0) P(2|5|4)
B(0|6|6) Q(4|2|4)

9. Optische Täuschung
Das Schrägbild zeigt eine Gerade g durch die Punkte A und B sowie zwei weitere Punkte P und Q, die auf g zu liegen scheinen. Ist dies tatsächlich der Fall?



10. Punkt und Strecke
Untersuchen Sie, ob der Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

a) A(2|1|4)
B(5|7|1)
P(3|3|3)

b) A(−2|4|5)
B(2|8|9)
P(0|6|7)

c) A(3|0|7)
B(4|1|6)
P(7|4|3)

d) A(2|1|3)
B(6|7|1)
P(4|3|1)

11. Dreieck
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Eckpunkten A(0|6|6), B(0|6|3) und C(3|3|0) sowie die Punkte P(2|2|2), Q(2|4|1) und R(2|5,5|4,5).
Fertigen Sie ein Schrägbild an und überprüfen Sie rechnerisch, welche der Punkte P, Q und R auf den Seiten des Dreiecks liegen.

12. Parallele Geraden
Welche der folgenden sechs Geraden sind parallel zueinander, welche sind sogar identisch?

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

u: Gerade durch A(1|2|−6) und B(9|−2|−4)

v: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

w: Gerade durch A(6|−1|−1) und B(2|1|−3)

13. Schnittpunktberechnung
Gegeben sind die Gerade g durch A und B sowie die Gerade h durch C und D.
Zeigen Sie, dass die Geraden sich schneiden, und berechnen Sie den Schnittpunkt S.

a) A(3|1|2), B(5|3|4)
C(2|1|1), D(3|3|2)

b) A(1|0|0), B(1|1|1)
C(2|4|5), D(3|6|8)

c) A(4|1|5), B(6|0|6)
C(1|2|3), D(−2|5|3)

14. Windschiefe Geraden

Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

15. Lagebeziehung

Untersuchen Sie, welche Lagebeziehung zwischen der Geraden g durch A und B und der Geraden h durch C und D besteht. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) A(−1|1|1), B(1|1|−1), C(1|1|1), D(0|1|2)

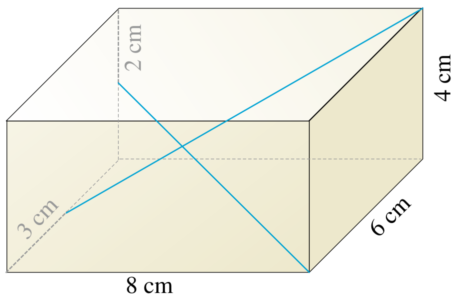
b) A(4|2|1), B(0|4|3), C(1|2|1), D(3|4|3)

c) A(2|0|4), B(4|2|3), C(6|4|2), D(10|8|0)

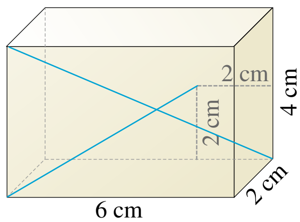
16. Geraden im Raum

Überprüfen Sie, ob die eingezeichneten Geraden sich schneiden, und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a)



b)



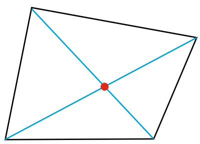
17. Ebenes Raumviereck

Vier Punkte bilden ein ebenes Raumviereck, wenn die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sich schneiden. Prüfen Sie, ob die Punkte A, B, C, D ein solches Viereck bilden.

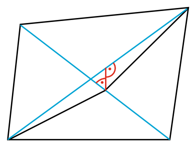
a) A(3|1|2), B(6|2|2), C(5|9|4), D(1|4|3)

b) A(4|0|0), B(4|3|1), C(0|3|4), D(4|0|3)

c) A(5|2|0), B(1|2|6), C(1|6|0), D(6|7|−2)



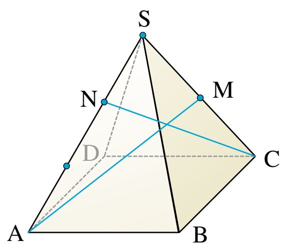
Die Diagonalen schneiden sich.



Die Diagonalen schneiden sich nicht.

18. Pyramide

Gegeben ist eine 6 m hohe gerade quadratische Pyramide, deren Grundflächenseiten 6 m lang sind.
Der Punkt M liegt in der Mitte der Seite $\overline{SC}$. Die Strecke $\overline{SA}$ ist dreimal so lang wie die Strecke $\overline{SN}$.
Wo schneiden sich die eingezeichneten Geraden?

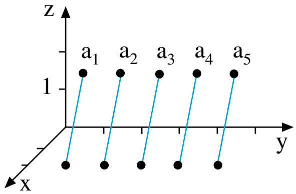


C. Geradenscharen

Enthält die Geradengleichung innerhalb des Stützvektors oder des Richtungsvektors eine Variable, so beschreibt die Gleichung eine ganze Schar von Geraden.

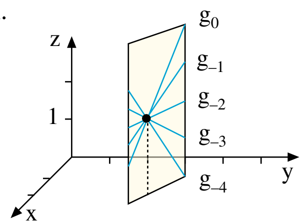
Beispiel: Parallele Geraden

Die Gleichung $g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\a\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ beschreibt eine Schar paralleler Geraden, denn alle Geraden g_a haben den gleichen Richtungsvektor. Sie unterscheiden sich nur in der y-Koordinate ihres Stützpunktes.



Beispiel: Gemeinsamer Stützpunkt

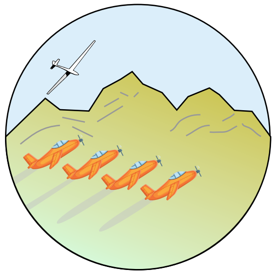
Die Gleichung $g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\2+a\end{pmatrix}$ beschreibt eine Schar von Geraden, die alle den gleichen Stützpunkt P(2|4|3) haben, um den sie sich aufgrund der veränderlichen z-Koordinate ihres Richtungsvektors drehen.



Beispiel: Kollisionskurs

Die Flugbahnen einer Formation von Sportflugzeugen können durch die Geradenschar g_a (a = 1, 2, ..., 8) beschrieben werden. Ist eines der Flugzeuge auf direktem Kollisionskurs mit dem Segelflugzeug h?

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\2+a\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\11\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$



Lösung:
Wir führen eine Schnittuntersuchung durch. Dazu setzen wir die Koordinaten von g_a und h gleich. Wir erhalten ein Gleichungssystem (drei Gleichungen, drei Variablen). Die Lösung lautet: r = 2, s = 3, a = 2. Das bedeutet: Der Flieger auf g_2 droht mit dem Flieger auf h im Punkt S(7|6|8) zu kollidieren.

Schnittuntersuchung:

I $\quad 9 - r = 1 + 2s$
II $\quad 2 + a + r = 3 + s$
III $\quad 6 + r = 11 - s$
aus I und III: r = 2, s = 3
aus II: a = 2
⇒ g_2 schneidet h in S(7|6|8).

Übung 19 Gerade mit Parameter

Gegeben sind die Geraden g_a und h.

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-a\\a\\2\end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\10\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

a) Für welchen Wert von a liegt der Punkt P(−1|5|4) auf g_a? Liegt Q(11|−6|4) auf g_a?
b) Für welchen Wert von a schneiden sich g_a und h? Wo liegt der Schnittpunkt?
c) Für welchen Wert von a liegt g_a parallel zur z-Achse?
d) Für welchen Wert von a schneidet g_a die x-Achse? Wo liegt der Schnittpunkt?

Übungen

20. Schar paralleler Geraden

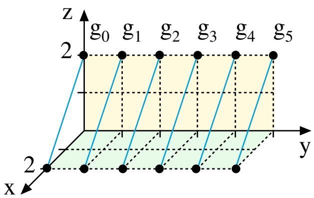
Dargestellt ist die Schar paralleler Geraden.

a) Geben Sie die Gleichungen von g_0 und g_1 an.

b) Stellen Sie die allgemeine Gleichung von g_a auf.

c) Ermitteln Sie, welche Gerade g_a die Gerade

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ schneidet.



21. Rettungstunnel

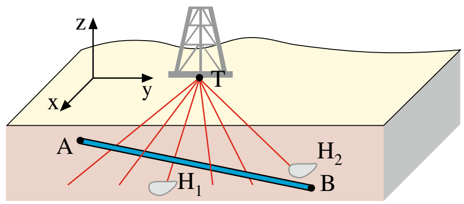
Bei einem Grubenunglück wird versucht, die im Schacht $\overline{AB}$ und den Hohlräumen H_1 und H_2 verschütteten Bergleute durch sechs vom Turm T(4|6|0) ausgehenden Rettungsbohrungen g_a zu erreichen.

Daten: A(8|2|−2); B(15|16|−9)

H_1(22|6|−14); H_2(12|16|−4)

$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 13-a \\ a-4 \\ a-11 \end{pmatrix}$

a = 0, 2, 4, 6, 8, 10



a) Wird der Schacht $\overline{AB}$ von einer der Bohrungen getroffen? Wenn ja, wo?

b) Entscheiden Sie, ob die Hohlräume H_1 und H_2 gefunden werden.

c) Entscheiden Sie, ob eine der Bohrungen senkrecht nach unten führt.

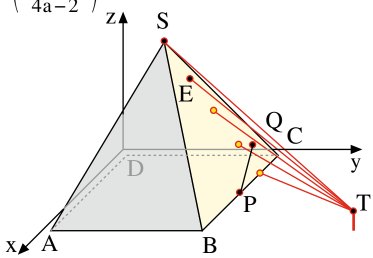
22. Scheinwerfer

Die Pyramide ABCDS hat die Koordinaten A(20|4|0), B(20|20|0), C(4|20|0), D(4|4|0) und S(12|12|16). Ihr Eingang liegt bei E(11|14|12). Eine Treppe führt von P(13|20|0) nach Q(7|17|6). Von der Turmspitze T(20|40|2) werden fünf Scheinwerfer auf die Pyramide gerichtet. Die Lichtstrahlen werden durch $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a-12 \\ -2a-20 \\ 4a-2 \end{pmatrix}$ beschrieben, (a = 0, 1, 2, 3, 4).

a) Entscheiden Sie, ob einer der Lichtstrahlen den Eingang E trifft.

b) Entscheiden Sie, ob einer der Lichtstrahlen die Treppe trifft.

c) Entscheiden Sie, ob einer der Strahlen parallel zur Seitenkante $\overline{BS}$ der Pyramide ist.



23. Durch $A(a+3|a|1)$ und $B(a+1|a+1|3)$ wird eine Geradenschar festgelegt ($a \in \mathbb{R}$).

a) Geben Sie eine Parametergleichung der Geradenschar an.

b) Ermitteln Sie, welche Gerade der Schar durch den Punkt $P(4|1|5)$ geht.

c) Ermitteln Sie, welche Geraden der Schar jeweils die Koordinatenachsen schneiden. Geben Sie auch die Schnittpunkte an.

24. Gegeben ist die Geradenschar g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2+a \\ 4-a \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, r, $a \in \mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die Lage der Geraden der Schar und zeichnen Sie die Geraden für $a = 1$, $a = 0$ und $a = -1$ als Schrägbild.

b) Ermitteln Sie, welche Gerade der Schar die z-Achse schneidet. Geben Sie auch den Schnittpunkt an.

c) Ermitteln Sie, welche Gerade der Schar durch den Punkt $P(8|2|1)$ geht.

d) Gibt es eine Gerade der Schar, die durch den Ursprung geht?

e) Zeigen Sie, dass die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zur gegebenen Geradenschar gehört.

25. Gegeben ist die Geradenschar g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 4-2a \end{pmatrix}$, r, $a \in \mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die Lage der Geraden der Schar und zeichnen Sie die Geraden für $a = 0$, $a = 1$ und $a = 2$ als Schrägbild.

b) Welche Gerade der Schar ist parallel zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$?

c) Welche Gerade der Schar geht durch den Punkt $P(x|3|1)$? Bestimmen Sie x.

d) Welche Gerade der Schar schneidet die z-Achse? Berechnen Sie auch den Schnittpunkt.

e) Welche Gerade der Schar schneidet die y-Achse? Berechnen Sie auch den Schnittpunkt.

f) Welche Gerade der Schar schneidet die x-Achse? Berechnen Sie auch den Schnittpunkt.

26. Gegeben sind die Geradenschar g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ und die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Beschreiben Sie die Lage der Geraden der Schar g_a.
Zeichnen Sie die Gerade h sowie die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 als Schrägbild.

b) Zeigen Sie, dass die Geraden g_4 und h windschief sind.

c) Entscheiden Sie, ob es eine Gerade der Schar g_a gibt, die parallel zu h ist.

d) Ermitteln Sie, welche Gerade der Schar g_a durch den Ursprung geht.

e) Ermitteln Sie, welche Gerade der Schar g_a parallel zur y-Achse ist.

f) Für welchen Wert von a schneiden sich die Geraden g_a und h? Berechnen Sie auch den Schnittpunkt.

4. Der Winkel zwischen Geraden

Schneiden sich zwei Geraden in einem Punkt S, so bilden sie dort zwei Paare von Scheitelwinkeln. Einer der beiden Winkel überschreitet 90° nicht. Diesen Winkel bezeichnet man als ***Schnittwinkel der Geraden***. Dieser kann mit Hilfe der Richtungsvektoren der beiden Geraden berechnet werden. Dazu verwendet man das Skalarprodukt, genauer gesagt die Kosinusformel für den Winkel zwischen Vektoren auf Seite 68.

Beispiel: Die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ schneiden sich im Punkt S(1|3|2). Bestimmen Sie den Schnittwinkel γ der Geraden.

Lösung:
Denken wir uns die Richtungsvektoren der beiden Geraden im Schnittpunkt S angesetzt, so schließen sie entweder den Schnittwinkel γ der Geraden oder dessen Ergänzungswinkel $\gamma' = 180° - \gamma$ ein.

Es reicht also zunächst aus, den Winkel δ zwischen den Richtungsvektoren $\vec{m}_1$ und $\vec{m}_2$ zu berechnen. Wir erhalten für den Winkel $\delta \approx 109{,}15°$. Dies bedeutet, dass wir γ' bestimmt haben. γ hat daher die Größe 70,85°.

1. Winkel zwischen $\vec{m}_1$ und $\vec{m}_2$:

$$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\cos\delta = \frac{\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2}{|\vec{m}_1| \cdot |\vec{m}_2|} = \frac{-16}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{58}} \approx -0{,}3281$$

$$\delta \approx 109{,}15°$$

2. Schnittwinkel γ von g und h:

$$\gamma \approx 180° - 109{,}15° = 70{,}85°$$

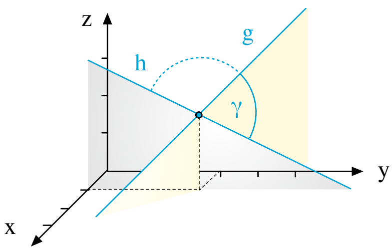
Noch einfacher ist es, die Kosinusformel leicht zu verändern durch Betragsbildung im Zähler. Dann erhält man sofort den Schnittwinkel γ. (Begründen Sie dies!)

Schnittwinkel von Geraden

g und h seien zwei Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec{m}_1$ und $\vec{m}_2$. Dann gilt für ihren Schnittwinkel γ:

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2|}{|\vec{m}_1| \cdot |\vec{m}_2|}.$$

Es gilt $0° \leq \gamma \leq 90°$.



Übung 1 Schnittpunkt und Schnittwinkel

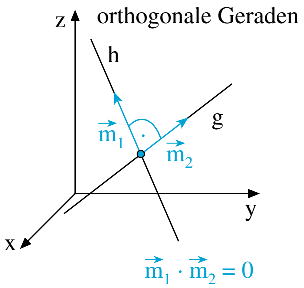
Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g und h.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Stehen zwei Geraden orthogonal zueinander, so lässt sich dieses sofort anhand der Orthogonalität der Richtungsvektoren feststellen. Es gilt folgende ***Orthogonalitätsbedingung***:

Orthogonalitätsbedingung
Zwei Geraden, die sich schneiden, stehen senkrecht aufeinander, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal sind (d. h., wenn das Skalarprodukt der Richtungsvektoren null ergibt).



Übung 2 Orthogonale Geraden
Überprüfen Sie, ob g und h senkrecht stehen oder ob sie für einen Wert von a senkrecht stehen können.

a) g: $\vec{x} = \binom{2}{3} + r\binom{1}{1}$, h: $\vec{x} = \binom{2}{9} + s\binom{2}{1}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \binom{3}{3} + r\binom{3}{-1}$, h: $\vec{x} = \binom{4}{6} + s\binom{-1}{a}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-0{,}5\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}a\\2\\-1\end{pmatrix}$

Übung 3 Schnittpunkt und Schnittwinkel
Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g und h.

a) g: $\vec{x} = \binom{1}{2} + r\binom{3}{1}$, h: $\vec{x} = \binom{4}{1} + s\binom{1}{1}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

c) g durch A (2|1) und B (3|2),
h durch C (2|7) und D (4|5)

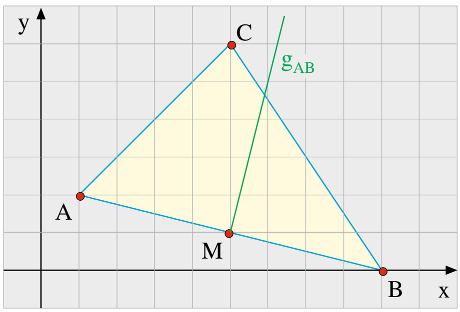
d) g durch A (3|2|5) und B (5|6|3),
h durch C (4|3|7) und D (−2|−6|4)

Übung 4 Ursprungsgerade
Unter welchen Winkeln schneidet die Ursprungsgerade g: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ die Koordinatenachsen?

Übung 5 Parameteraufgabe
Bestimmen Sie t so, dass die Gerade durch P (6|4|t) die x-Achse bei x = 3 unter 60° schneidet.

Übung 6 Die Mittelsenkrechte auf einer Strecke im $\mathbb{R}^2$
Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (1|2), B (9|0) und C (5|6).

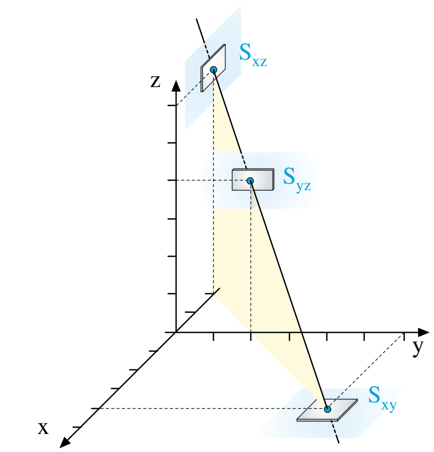
a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.
b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n} = \binom{x}{y}$, der senkrecht auf dem Streckenvektor $\overrightarrow{AB}$ steht.
c) Stellen Sie die Gleichung der Mittelsenkrechten g_{AB} der Strecke $\overline{AB}$ auf.
d) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. Geben Sie die Bedeutung des Punktes S an.



5. Spurpunkte mit Anwendungen

In diesem Abschnitt werden als exemplarische Anwendungsbeispiele für Geraden Spurpunktprobleme behandelt.

Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen bezeichnet man als ***Spurpunkte*** der Geraden.



Beispiel: Spurpunkte

Gegeben sei g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden und fertigen Sie eine Skizze an.

Lösung:
Der Schnittpunkt der Geraden mit der x-y-Ebene wird als Spurpunkt S_{xy} bezeichnet. Er hat die z-Koordinate z = 0.
Die z-Koordinate des allgemeinen Geradenpunktes beträgt z = 2 − r.
Setzen wir diese 0, so erhalten wir r = 2, was auf den Spurpunkt $S_{xy}(4|6|0)$ führt.

$z = 0 \Leftrightarrow 2 - r = 0 \Leftrightarrow r = 2$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_{xy}(4|6|0)$

Analog errechnen wir die weiteren Spurpunkte, indem wir die x-Koordinate bzw. die y-Koordinate des allgemeinen Geradenpunktes null setzen.
Ergebnisse: $S_{yz}(0|2|4)$, $S_{xz}(-2|0|6)$

Übung 1

Berechnen Sie die Spurpunkte der Geraden g durch A und B. Fertigen Sie eine Skizze an.

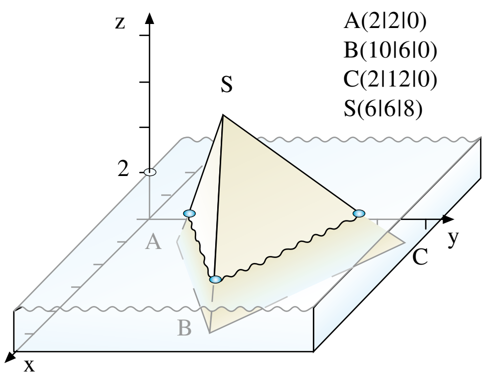
a) A(10|6|−1), B(4|2|1)
b) A(−2|4|9), B(4|−2|3)
c) A(4|1|1), B(−2|1|7)
d) A(2|4|−2), B(−1|−2|4)

Übung 2

Geben Sie die Gleichung einer Geraden g an, die nur zwei Spurpunkte bzw. nur einen Spurpunkt besitzt.

Übung 3

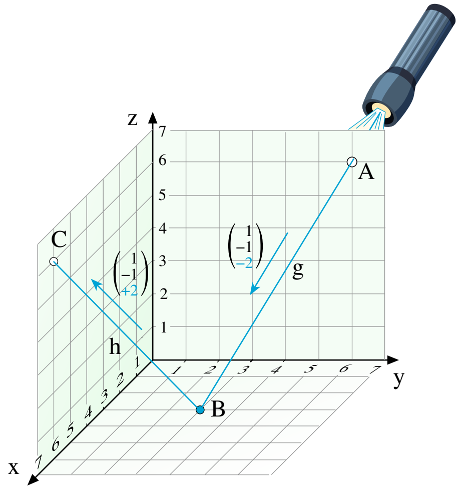
In welchen Punkten durchdringen die Kanten der skizzierten Pyramide den 2 m hohen Wasserspiegel?



Im Folgenden werden Spurpunktberechnungen zur Lösung von Anwendungsaufgaben zur Lichtreflexion und zum Schattenwurf eingesetzt.

Beispiel: Lichtreflexion

Der Verlauf eines Lichtstrahls soll verfolgt werden. Der Strahl geht vom Punkt A (0|6|6) aus und läuft in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf die x-y-Ebene zu, an der er reflektiert wird.
Wo trifft der Strahl auf die x-y-Ebene? Wie lautet die Geradengleichung des dort reflektierten Strahles und wo trifft dieser auf die x-z-Ebene?



Lösung:
Wir bestimmen zunächst die Geradengleichung des von A ausgehenden Strahls g. Dessen Schnittpunkt B mit der x-y-Ebene erhalten wir durch Nullsetzen der z-Koordinate des allgemeinen Geradenpunktes von g.
Der reflektierte Strahl h geht von diesem Punkt B (3|3|0) aus. Bei der Reflexion ändert sich nur diejenige Koordinate des Richtungsvektors, die senkrecht auf der Reflexionsebene steht. Diese Koordinate wechselt ihr Vorzeichen, hier also die z-Koordinate. Der Richtungsvektor von h ist daher $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ +2 \end{pmatrix}$. Nun können wir die Geradengleichung des reflektierten Strahls h aufstellen und dessen Schnittpunkt mit der x-z-Ebene berechnen. Es ist der Punkt C (6|0|6).

Gleichung des Strahls g:

$$g\colon x = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt mit der x-y-Ebene:

$$z = 0 \;\Leftrightarrow\; 6 - 2r = 0 \;\Leftrightarrow\; r = 3 \;\Rightarrow\; B\,(3|3|0)$$

Gleichung des reflektierten Strahls h:

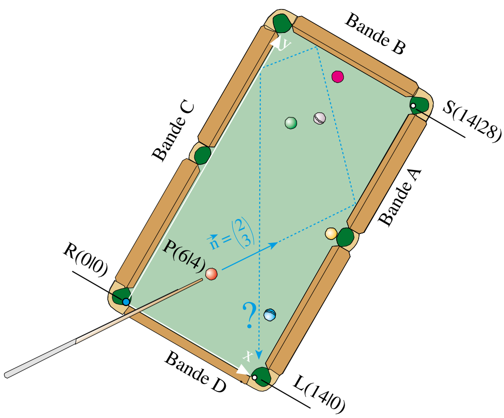
$$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ +2 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt mit der x-z-Ebene:

$$y = 0 \;\Leftrightarrow\; 3 - s = 0 \;\Leftrightarrow\; s = 3 \;\Rightarrow\; C\,(6|0|6)$$

Übung 4 Billard

Auch beim Billardspiel kommt es zu Reflexionen der Kugel an der Bande. Auf dem abgebildeten Tisch liegt die Kugel in der Position P (6|4). Sie wird geradlinig in Richtung des Vektors $\binom{2}{3}$ gestoßen.
Entscheiden Sie, ob die Kugel ins Loch bei L (14|0) läuft.
Lösen Sie die Aufgabe zeichnerisch und rechnerisch.



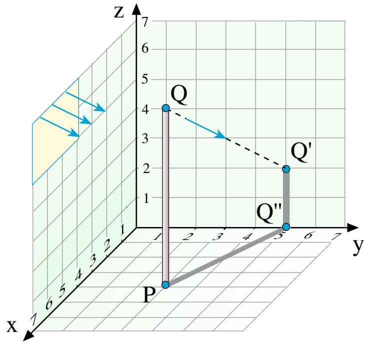
Spurpunktberechnungen können auch zur Konstruktion der Schattenbilder von Gegenständen im Raum auf die Koordinatenebenen verwendet werden.

Beispiel: Schattenwurf

Im 1. Oktanden des Koordinatensystems steht die senkrechte Strecke $\overline{PQ}$ mit $P(4|3|0)$ und $Q(4|3|6)$.

In Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$ fällt paralleles Licht auf die Strecke.

Konstruieren Sie rechnerisch ein Schattenbild der Strecke auf den Randflächen des 1. Oktanden.



Lösung:

Das Ergebnis ist rechts abgebildet, ein abknickender Schatten. Es wurde durch Verfolgung desjenigen Lichtstrahls g konstruiert, der durch den Punkt Q führt.

Nach dem Aufstellen der Geradengleichung von g errechnen wir den Spurpunkt Q' von g in der y-z-Ebene, denn wir vermuten, dass der Strahl g diese Ebene zuerst trifft.

Gleichung des Strahls g durch Q:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Durch Nullsetzen der x-Koordinate des allgemeinen Geradenpunktes erhalten wir $r = 2$, d. h. $Q'(0|5|2)$.

Schnittpunkt von g mit der y-z-Ebene:

$$x = 0 \Leftrightarrow 4 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 2 \Rightarrow Q'(0|5|2)$$

Der Fußpunkt des senkrechten Lotes von Q' auf die y-Achse ist $Q''(0|5|0)$.

Fußpunkt des Lotes von Q' auf die y-Achse:

$Q''(0|5|0)$

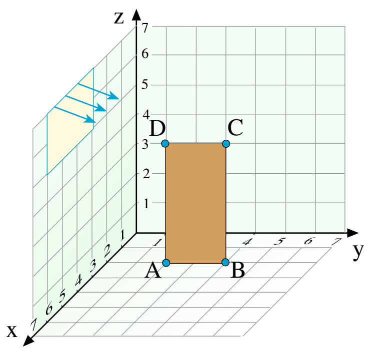
Der Schatten der Strecke $\overline{PQ}$ ist der Streckenzug $PQ''Q'$, wie oben eingezeichnet. Es handelt sich um einen abknickenden Schatten.

Übung 5 Schatten

Im mathematischen Klassenraum steht ein Schrank für die Aufbewahrung von Punkten, Strecken und Flächen. Er hat die Höhe 4 und die Breite 2. Für seine Tiefe reicht bekanntlich 0 aus.

In Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ fällt paralleles Licht auf den Schrank.

Konstruieren Sie das Schattenbild des Schrankes auf dem Boden und den Wänden rechnerisch und zeichnen Sie es auf.



Übungen

6. Spurpunkte

Gegeben sind die Geraden g durch A(1|3|6) und B(2|4|3) sowie h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden und zeichnen Sie ein Schrägbild.

7. Anzahl von Spurpunkten

Geraden können 1, 2, 3 oder unendlich viele unterschiedliche Spurpunkte besitzen. Erläutern Sie diese Tatsache und überprüfen Sie, welcher Fall bei den folgenden Geraden jeweils eintritt.

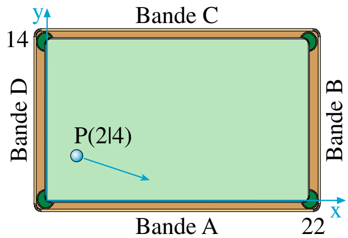
a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) g: $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

8. Billard

In welchem Punkt trifft die vom Punkt P(2|4) in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ geradlinig gestoßene Billardkugel die Bande C erstmals?

Bestimmen Sie den gesuchten Punkt zeichnerisch und rechnerisch.



9. Schattenbilder

In Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ fällt paralleles Licht.

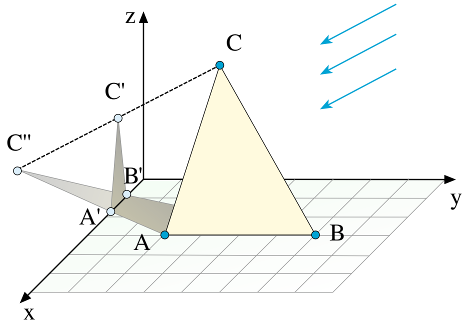
a) Im 1. Oktanden des Koordinatensystems steht die zur x-y-Ebene senkrechte Strecke $\overline{PQ}$ mit P(4|6|0) und Q(4|6|3). Konstruieren Sie das Schattenbild der Strecke in der x-y-Ebene (zeichnerisch und rechnerisch).

b) Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit A(4|3|0), B(2|3|0), C(2|3|3), D(4|3|3). Konstruieren Sie das Schattenbild des Rechtecks auf dem Boden und den Randflächen des 1. Oktanden (zeichnerisch und rechnerisch).

10. Dreiecksschatten

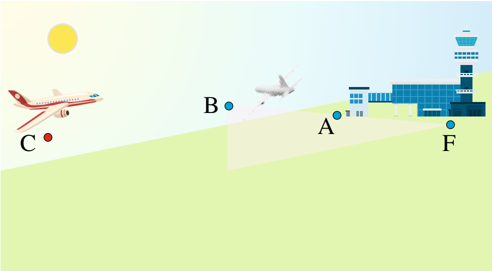
Im Koordinatenraum steht ein schräg nach oben geneigtes Dreieck ABC mit A(3|2|0), B(3|6|0), C(2|3|4). In Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ fällt paralleles Licht auf dieses Dreieck.

Zeichnen Sie das Schattenbild des Dreiecks, wobei Sie sich an der (nicht maßstäblichen) Skizze orientieren. Berechnen Sie dann die Eckpunkte des Dreiecksschattens auf dem Boden und den Wänden des Raums.



11. Flugbahnen

Flugzeug Alpha fliegt geradlinig durch die Punkte A (−8|3|2) und B (−4|−1|4). Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer. Der Flughafen F befindet sich in der x-y-Ebene.



a) In welchem Punkt F ist das Flugzeug gestartet? In welchem Punkt T erreicht es seine Reiseflughöhe von 10 000 m?

b) Flugzeug Beta steuert Punkt C (10|−10|5) aus Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ an. Zeigen Sie, dass die beiden Flugzeuge keinesfalls kollidieren können.

c) In dem Moment, an dem Flugzeug Alpha den Punkt B passiert, erreicht Flugzeug Beta den Punkt C. Wie groß ist die Entfernung der Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt?

d) Beim Passieren von Punkt C wird Flugzeug Beta vom Tower aufgefordert, in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ weiterzufliegen. In 1000 m Höhe soll eine weitere Kursänderung erfolgen, die Flugzeug Beta zum Flughafen F bringt. In welche Richtung muss diese letzte Korrektur das Flugzeug führen?

12. Flugbahn und Fluggeschwindigkeit

Ein Sportflugzeug Gamma passiert um 10 Uhr den Punkt A (10|1|0,8) und 2 Minuten später den Punkt B (15|7|1). Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Kilometer. Das Flugzeug fliegt mit konstanter Geschwindigkeit.

a) Stellen Sie die Gleichung der Geraden g auf, auf der das Flugzeug Gamma fliegt. Erläutern Sie für Ihre Geradengleichung den Zusammenhang zwischen dem Geradenparameter und dem zugehörigen Zeitintervall.

b) Wo befindet sich das Flugzeug Gamma um 10 : 10 Uhr? Mit welcher Geschwindigkeit fliegt es? Wann erreicht das Flugzeug die Höhe von 4000 m?

c) Ein zweites Flugzeug Delta passiert um 10 Uhr den Punkt P (100|130|3,7) und eine Minute später den Punkt Q (95|121|3,6). Prüfen Sie, ob sich die beiden Flugbahnen schneiden, und untersuchen Sie, ob tatsächlich die Gefahr einer Kollision besteht.

13. Tauchfahrt

Ein U-Boot beginnt eine Tauchfahrt in P (100|200|0) mit 11,1 Knoten in Richtung des Peilziels Z (500|600|−80), bis es eine Tiefe von 80 m erreicht hat.

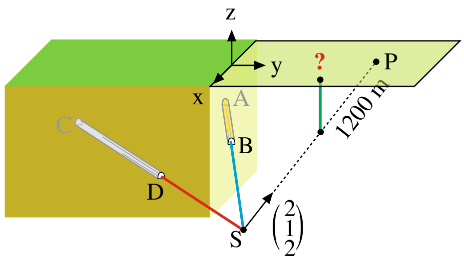
$\left(1 \text{ Knoten} = 1\ \frac{\text{Seemeile}}{\text{Stunde}} \approx 1{,}852\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$

Anschließend wechselt es ohne Kursveränderung in eine horizontale Schleichfahrt von 11 Knoten.

Enscheiden Sie, ob es zu einer Kollision mit der Tauchkugel T kommt, die zeitgleich vom Forschungsschiff S (700|800|0) mit einer Geschwindigkeit von 0,5 m/s senkrecht sinkt.

14. Bergwerksstollen

Vom Punkt A(−7|−3|−8) ausgehend soll durch den Punkt B(−2|0|−9) ein geradliniger Stollen namens Kuckucksloch in einen Berg getrieben werden. Ebenso soll ein Stollen namens Morgenstern von Punkt C(4|−6|−6) ausgehend über den Punkt D(7|−1|−8) geradlinig gebaut werden. Eine Einheit entspricht 100 m. Die Erdoberfläche liegt in der x-y-Ebene.



a) Prüfen Sie, ob die Ingenieure richtig gerechnet haben und die Stollen sich wie geplant in einem Punkt S treffen.

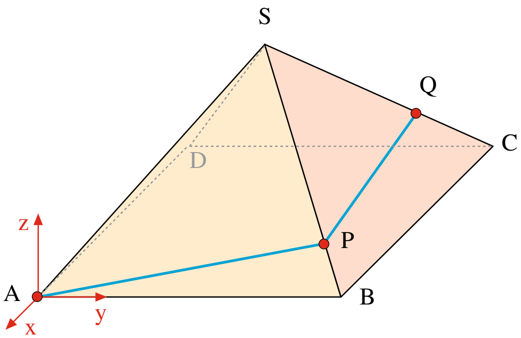
b) Im Stollen Kuckucksloch kann die Bohrung um 5 m pro Tag vorangetrieben werden. Wie hoch muss die Bohrleistung im Stollen Morgenstern durch C und D sein, damit beide Stollen am selben Tag den Vereinigungspunkt S erreichen?

c) Von Punkt S aus wird der Stollen Kuckucksloch weiter in Richtung $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ fortgesetzt. In welchem Punkt P erreicht der Stollen die Erdoberfläche?

d) In 1 200 m Entfernung von Punkt P auf der Strecke $\overline{SP}$ soll ein senkrechter Notausstieg gebohrt werden. An welchem Punkt der Erdoberfläche muss die Bohrung beginnen? Wie tief wird die Bohrung sein?

15. Pyramide

Gegeben sei eine gerade quadratische Pyramide, die 100 m breit und 50 m hoch ist.



a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden, in denen die vier Pyramidenkanten verlaufen.

b) Forscher vermuten, dass das Baumaterial über riesige Rampen, die sich längs der eingezeichneten blauen Strecken an die Pyramide lehnten, transportiert wurde.
Die erste Rampe hat im Punkt P 10 m Höhen erreicht. Bestimmen Sie P.

c) Die anschließende Rampe soll den gleichen Steigungswinkel besitzen.
Bestimmen Sie die Gleichung der entsprechenden Geraden.
In welchem Punkt Q endet diese Rampe?
In welchem Punkt erreicht die Rampe die Höhe von 15 m?

d) In welchen Punkten durchstoßen die Pyramidenkanten eine Höhe von 20 m?
In welcher Höhe beträgt der horizontale Querschnitt der Pyramide 25 m^2?

Vom Punkt T(50|−50|100) fällt Licht in Richtung $\begin{pmatrix}-1-a\\3-a\\a-2\end{pmatrix}$.

e) Zeigen Sie, dass vom Punkt T je ein Lichtstrahl auf die Punkte B und S fällt.

f) Zeigen Sie: Jeder Punkt der Kante $\overline{BS}$ wird angestrahlt.

g) Bestimmen Sie den Schattenwurf der Kante $\overline{BS}$ in der x-y-Ebene.

16. Kletterturm

Ein Kletterturm ist in der Form eines Pyramidenstumpfes geplant. Hierbei bilden die Ecken A(0|0|0), B(4|6|0), C(0|12|0) und D(−8|0|0) das Grundflächenviereck, während E(2|0|12), F(4|3|12), G(2|6|12) und H(−2|0|12) das Deckflächenviereck bilden.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Pyramidenstumpfes.

b) Zeichnen Sie die Grundfläche in der x-y-Ebene. Tragen Sie hierin auch die Projektion der Oberfläche ein. Klassifizieren Sie nun die vier Kletterflächen nach ihrem Schwierigkeitsgrad.

c) Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Pyramide handelt. Überprüfen Sie hierzu die Pyramidenspitze S. Treffen sich die vier Kanten in S?

d) Bestimmen Sie zunächst das Volumen der Pyramide und dann das des Stumpfes.

e) Welche Koordinaten hat das Querschnittsviereck in halber Höhe des Stumpfes?

f) Zeigen Sie: Die Geradenschar durch S in Richtung $\begin{pmatrix} -2-2a \\ 3a \\ 12 \end{pmatrix}$ enthält die Geraden durch die Kanten $\overline{BF}$ und $\overline{CG}$.

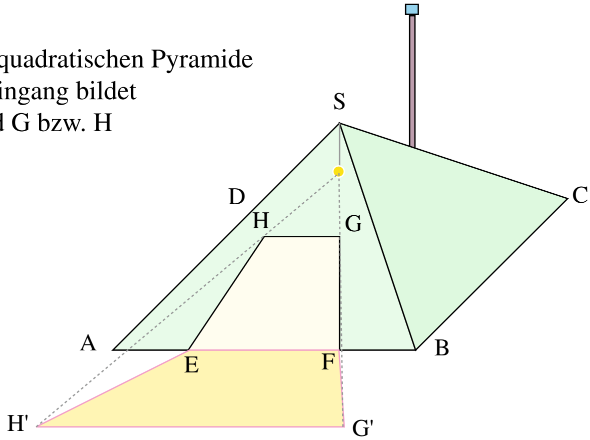
g) Begründen Sie, dass die Richtungsvektoren der Schar aus f komplanar sind.

17. Pyramidenzelt

Ein Zelt hat die Form einer geraden quadratischen Pyramide mit 8 m Breite und 3 m Höhe. Den Eingang bildet das Trapez EFGH mit |EF| = 4 m und G bzw. H als Mitten der Strecken $\overline{ES}$ bzw. $\overline{FS}$.

a) Wie groß ist der Eingang EFGH?

b) Ein Meter unter der Zeltspitze S befindet sich eine Lichtquelle. Durch den Eingang fällt Licht nach außen und begrenzt so eine beleuchtete Fläche. Wie groß ist sie?



c) Wie ändert sich die beleuchtete Fläche, wenn die Lichtquelle weiter nach oben bzw. weiter nach unten gebracht wird?
Welche Grenzflächen ergeben sich, wenn sich die Lichtquelle in S bzw. in 1,5 m Höhe befindet?

d) In der Mitte der hinteren Zeltkante $\overline{CD}$ ist auf einer senkrechten Stange eine Kamera angebracht. In welcher Höhe muss sie sich befinden, wenn sie die gesamte beleuchtete Fläche überwachen soll?

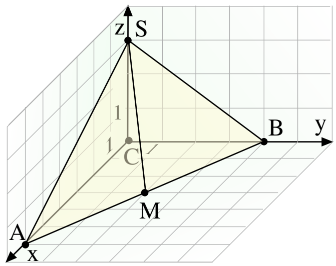
18. Pyramide

Eine gerade quadratische Pyramide ist 80 m breit und 70 m hoch. Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche der Pyramide, S sei die Spitze der Pyramide.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide im Koordinatensystem.
b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{AS}$ bei Punkt A bilden.
c) Ermitteln Sie den Winkel zwischen den Kanten $\overline{AS}$ und $\overline{CS}$ der Pyramide.
d) Ermitteln Sie die Größe der Mantelfläche M der Pyramide sowie ihr Volumen V.

19. Dreiseitige Pyramide

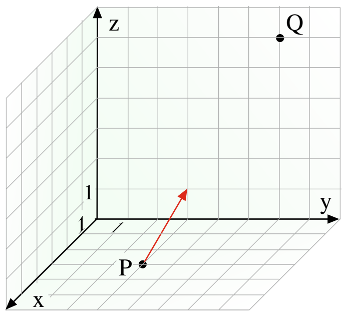
a) Bestimmen Sie in der rechts dargestellten Pyramide die Winkel im Dreieck ABS sowie den Inhalt des Dreiecks.
b) Ermitteln Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$. Prüfen Sie, ob der Winkel ∢ BMS ein rechter Winkel ist.



20. Reflexion

Ein Lichtstrahl g geht durch den Punkt P(3|3|0) und läuft in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf die y-z-Ebene zu.

a) Berechnen Sie, in welchem Punkt Q der Strahl g die y-z-Ebene trifft.
b) Der Strahl g wird im Punkt Q nach dem Reflexionsgesetz reflektiert. Geben Sie die Geradengleichung des reflektierten Strahls h an.
c) Emitteln Sie die Größe des Winkels α zwischen einfallendem Lichtstrahl g und reflektiertem Lichtstrahl h.



21. Senkrechte Gerade

Eine Ebene E enthält die Punkte A(2|3|1), B(4|5|2) und C(3|1|3). Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, welche die Ebene E im Punkt A senkrecht schneidet.

22. Flugbahnen

Flugzeug Alpha fliegt geradlinig durch die Punkte A(−4|4|3) und B(−2|3|2). Flugzeug Beta durchfliegt die Punkte C(−12|2|10) und D(−10|3|8) (1 LE = 1 km).

a) Weisen Sie nach, dass die Flugbahnen sich treffen.
b) Berechnen Sie, welchen Winkel die Flugbahnen im Schnittpunkt bilden.

23. U-Boot

Ein U-Boot passiert bei geradliniger Tauchfahrt die Positionen A(20|30|−20) und B(30|50|−40) im Abstand von einer Minute (Positionsangaben in Metern).

a) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit des U-Bootes.
b) Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten ab Position A das U-Boot 140 m Tiefe erreicht.
c) In 140 m Tiefe fährt das U-Boot unter Beibehaltung seiner x-y-Richtung horizontal weiter. Ermitteln Sie, um welchen Winkel der Kurs geändert werden muss.

Übungen

Die folgenden Übungen sollen ohne Hilfsmittel gelöst werden.

1. Punkt und Gerade
Prüfen Sie, ob die gegebenen Punkte auf der Geraden durch die beiden Punkte A (3|−2|4) und B (9|10|−14) liegen. Prüfen Sie weiter, ob die Punkte sogar auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen.
a) P (1|−6|10) b) Q (−3|−14|15) c) R (6|4|−5)

2. Geradengleichung und Spurpunkte
Eine Gerade g enthält die Punkte A (2|−2|5) und B (6|2|3).
a) Stellen Sie die Gleichung der Geraden g auf.
b) Berechnen Sie, in welchem Punkt die Gerade g die y-z-Ebene, die x-z-Ebene und die x-y-Ebene schneidet (Spurpunkte der Geraden).
c) Zeichnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von b) die Gerade g im Schrägbild.

3. Parallele Geraden
Untersuchen Sie, welche der folgenden Geraden parallel sind.

$g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $g_3\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_4\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

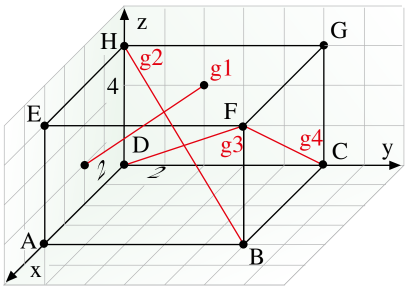
4. Sich schneidende oder windschiefe Geraden
Untersuchen Sie, ob die Geraden g und h parallel sind, sich schneiden oder windschief sind.

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) g geht durch A (4|0|2) und B (2|2|4), h geht durch C (2|−2|9) und D (2|2|5).

5. Geradengleichungen
Im abgebildeten Quader sind vier Geraden eingezeichnet.

a) Stellen Sie die Gleichungen der abgebildeten Geraden auf.
b) Begründen Sie, dass nur eine der Geraden keinen Schnittpunkt mit einer der anderen Geraden hat.
Um welche Gerade handelt es sich?



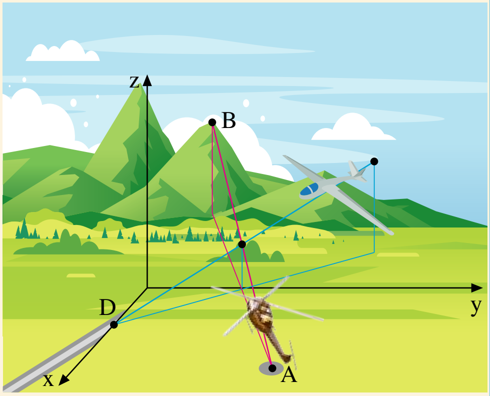
6. Schattenwurf
Im Punkt A (4|4|0) steht ein 6 m hoher senkrechter Stab. In Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ fällt Licht auf den Stab und erzeugt in der x-y-Ebene einen Schatten des Stabs.
Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie die Lage des Schattenbildes der Stabspitze S sowie die Länge l des Schattens des Stabes.

Flugbahnen

Flugbahnen können im Modell ganz oder teilweise durch Geraden dargestellt werden. Dabei können auch Fluggeschwindigkeiten eine Rolle spielen, vor allem wenn es darum geht, Kollisionen mehrerer Fluggeräte zu vermeiden.

Beispiel: Auf Kollisionskurs?

Um 12.00 Uhr startet ein Rettungshubschrauber vom Stützpunkt A(12|16|0) zu einem Bergungsflug zum Gipfel B(−12|0|8). Seine Geschwindigkeit beträgt $v_H = 180\,\text{km/h}$. Zeitgleich leitet ein Segelflugzeug den ebenfalls geradlinigen Landeanflug ein. Es befindet sich zu diesem Zeitpunkt an der Position C(−4|16|8) und ist im Anflug auf den Landepunkt D(4|0|0). Seine Geschwindigkeit beträgt $v_F = 120\,\text{km/h}$. (Eine Einheit entspricht 1 km.)
Sind die Fluggeräte auf Kollisionskurs?
Kommt es tatsächlich zur Kollision?



Lösung:
Wir stellen zunächst die Gleichungen der Flugbahnen h (Hubschrauber) und f (Flugzeug) auf. Danach können wir die Richtungsvektoren in diesen Gleichungen in einem weiteren Schritt noch vereinfachen.

Flugbahngeraden h und f:

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}12\\16\\0\end{pmatrix} + r'\begin{pmatrix}-24\\-16\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\16\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$f:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\16\\8\end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix}8\\-16\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\16\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

Sodann setzen wir die rechten Seiten der beiden Flugbahngeraden gleich. Wir erhalten ein lineares Gleichunggssystem mit zwei Variablen und drei Gleichungen.

Schnittuntersuchung:

$$\begin{array}{llll} \text{I:} & 12 - 3r = -4 + t & & \text{I:}\quad -3r - t = -16 \\ \text{II:} & 16 - 2r = 16 - 2t & \Rightarrow & \text{II:}\quad -2r + 2t = 0 \\ \text{III:} & r = 8 - t & & \text{III:}\quad r + t = 8 \end{array}$$

Es hat die Lösungen r = 4 und t = 4, welche auf den Schnittpunkt S(0|8|4) führen.
Die Fluggeräte sind also auf direktem Kollisionskurs.

$$\begin{array}{ll} \text{I + III:} & -2r = -8 \Rightarrow r = 4 \\ \text{in I:} & -12 - t = -16 \Rightarrow t = 4 \end{array} \Rightarrow S(0|8|4)$$

Nun berechnen wir die Längen der Flugstrecken bis zum Schnittpunkt S. Sie lauten $|AS| \approx 14{,}97\,\text{km}$ und $|CS| \approx 9{,}80\,\text{km}$.

Länge der Flugstrecken bis zum Punkt S:

$$|\overrightarrow{AS}| = \left|\begin{pmatrix}-12\\-8\\4\end{pmatrix}\right| \approx 14{,}97,\ |\overrightarrow{CS}| = \left|\begin{pmatrix}4\\-8\\-4\end{pmatrix}\right| \approx 9{,}80$$

Schließlich können wir daraus nach der Formel v = s/t bzw t = s/v die Flugzeiten bis zum Kollisionspunkt S berechnen. Sie sind unterschiedlich. Also kommt es nicht zu einer Kollission, aber es ist sehr knapp.

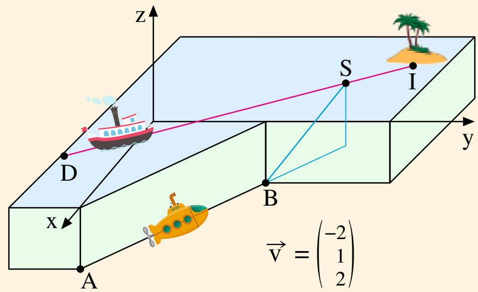
Flugzeit bis zum Punkt S:

$$h:\ t = \frac{s}{v} = \frac{14{,}97\,\text{km}}{180\,\text{km/h}} \approx 0{,}083\,\text{h} \approx 299\,\text{s}$$

$$f:\ t = \frac{s}{v} = \frac{9{,}80\,\text{km}}{120\,\text{km/h}} \approx 0{,}082\,\text{h} \approx 294\,\text{s}$$

U-Boot auf Fahrt

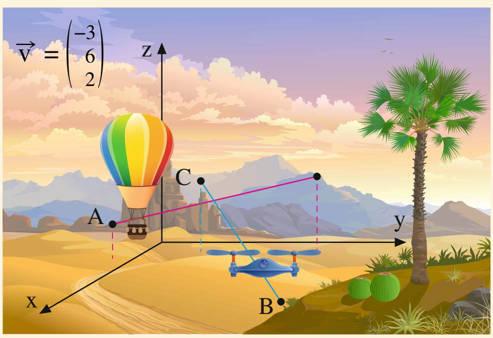
Ein U-Boot befindet sich um 12:00 Uhr an der Position A(12|0|−6) und fährt mit einer Geschwindigkeit von v_{U1} = 15 km/h bei gleichbleibender Tiefe bis zur Position B(0|9|−6). Hier ändert es die Fahrt in Richtung des Vektors $\vec{v}$ (s. rechts) bei gleichbleibender Geschwindigkeit.
Zeitgleich um 12:00 Uhr befindet sich ein Versorgungsdampfer an der Ausgangsposition D(6|−4|0) auf geradliniger Fahrt in Richtung des Inselhafens I(−9|16|0). Seine Geschwindigkeit beträgt v_D = 10 km/h.
Alle Längen sind in Kilometern angegeben.



a) Berechnen Sie die Ankunftszeit des U-Bootes an der Position B.
b) Berechnen Sie den Winkel γ der Fahrtrichtungsänderung des U-Boots an der Position B.
c) An welcher Stelle S und um welche Uhrzeit erreicht das U-Boot die Oberfläche des Meeres?
d) Zeigen Sie, dass U-Boot und Dampfer auf Kurs zu einem gemeinsamen Treffpunkt S sind.
e) Prüfen Sie, ob die beiden Schiffe zum gleichen Zeitpunkt am Treffpunkt S eintreffen.
f) Untersuchen Sie, wie das Versorgungsschiff seine konstante Geschwindigkeit ändern müsste, wenn beide Schiffe den Treffpunkt gleichzeitig erreichen sollen.
g) Ermitteln Sie, zu welcher Uhrzeit sich das U-Boot nur noch 2 km unter der Oberfläche befindet. Ermitteln Sie, wie weit es zu diesem Zeitpunkt vom Versorgungsschiff entfernt ist.

Ballon und Drohne

Ein Heißluftballon befindet sich um 13:00 Uhr an der Position A(16|−2|4) und fliegt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 14 km/h in Richtung des Vektors $\vec{v}$ (siehe rechts). Ebenfalls um 13:00 Uhr startet eine Drohne bei B(26|26|0) in Richtung des Zielpunktes C(6|6|10), um dort den exakt gleichen Rückweg zum Startpunkt anzutreten. Ihre Geschwindigkeit beträgt durchgehend 36 km/h. Für das Wenden wird keine Zeit berechnet.
Alle Längen sind in Kilometern angegeben.



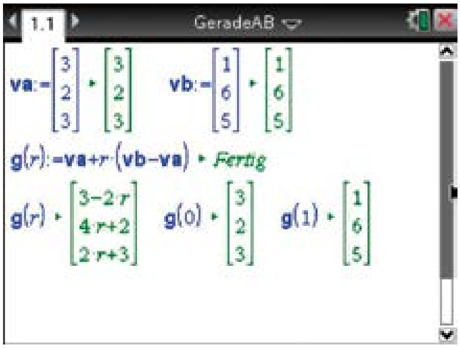
a) Nach welcher Zeit erreicht der Ballon bei störungsfreiem Flug eine Höhe von 10 km?
b) Berechnen Sie, in welcher Höhe sich der Ballon bei störungsfreiem Flug um 13:45 Uhr befindet.
c) Ermitteln Sie, wann die Drohne ihren höchsten Punkt erreicht.
d) Ist die Aussage richtig, dass der Abstand der Fluggeräte um 13.30 weniger als 10 km beträgt?
e) Untersuchen Sie, ob sich die Flugobjekte auf Kollisionskurs befinden.
f) Untersuchen Sie, ob es zur Kollision kommt.

CAS-Anwendung

Es werden folgende Grundaufgaben behandelt:
- Aufstellung einer Geradengleichung zu gegebenen Punkten A und B
- Punkt und Gerade
- Schnittpunkt von zwei Geraden
- Spurpunkte einer Geraden

Beispiel: Gerade durch zwei Punkte
Bestimmen Sie eine vektorielle Parametergleichung derjenigen Geraden g, die durch die Punkte A (3|2|3) und B (1|6|5) verläuft.

Lösung:
Zunächst werden die Ortsvektoren der Punkte A und B eingegeben: va := [3; 2; 3], vb := [1; 6; 5]. Anschließend wird die Gerade g definiert: g (r) := va + r · (vb – va).



Der Aufruf g (r) ergibt den Vektor $\vec{x}$ zur Geraden g mit dem Parameter r:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot r \\ 2 + 4 \cdot r \\ 3 + 2 \cdot r \end{pmatrix}$, also

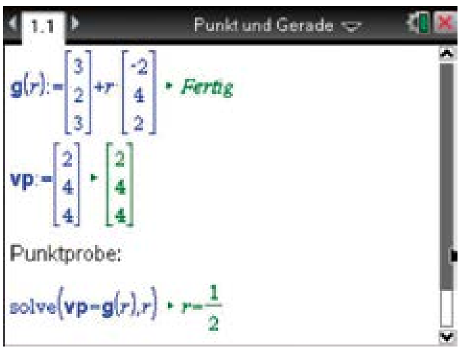
g: $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Durch Einsetzen von r = 0 und r = 1 in g (r) wird bestätigt, dass A und B tatsächlich auf g liegen.

Beispiel: Punkt und Gerade
Gegeben ist die Gerade g durch die Parametergleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Weisen Sie nach, dass der Punkt P (2|4|4) auf der Geraden g liegt.

Lösung:
Wir definieren die Gerade g durch
g (r) := [3; 2; 3] + r · [–2; 4; 2]
und den Punkt P durch den Ortsvektor $\vec{p}$:
vp := [2; 4; 4].
Die Punktprobe besteht in der Untersuchung, ob eine Lösung der Gleichung p = g (r) für den Parameter r existiert:
solve(vp=g(r), r) liefert $r = \frac{1}{2}$.
Folglich liegt der Punkt P auf der gegebenen Geraden g.



Beispiel: Schnittpunkt von zwei Geraden

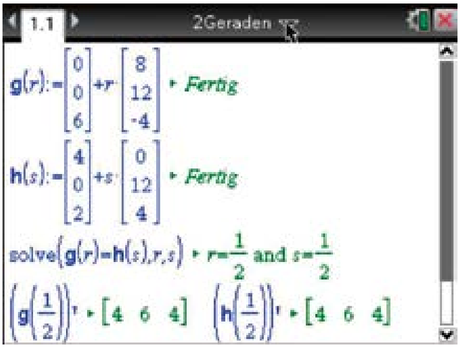
Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}8\\12\\-4\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\12\\4\end{pmatrix}$.

Prüfen Sie, ob sich die Geraden schneiden, und berechnen Sie ggf. den Schnittpunkt.

Lösung:
Zunächst werden die Geraden definiert:
g(r) := [0; 0; 6] + r · [8; 12; −4],
h(s) := [4; 0; 2] + r · [0; 12; 4].

Der Befehl solve(g(r) = h(s), r, s) liefert die Lösung $r = \frac{1}{2}$ **und** $s = \frac{1}{2}$; folglich schneiden sich die beiden Geraden.

Setzt man jeweils den in der Lösung ermittelten Parameter in g(r) bzw. h(s) ein, so erhält man den Schnittpunkt S der beiden Geraden: S(4|6|4).



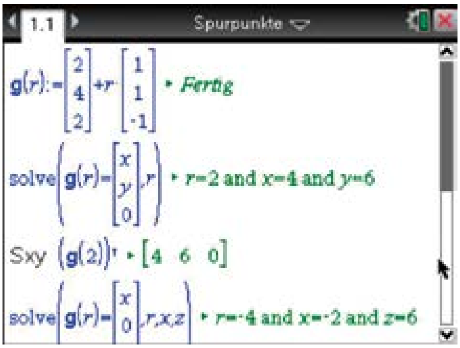
Hinweis: Die Darstellung als Zeilenvektor erhält man durch Transponieren.

Beispiel: Spurpunkte einer Geraden

Gegeben ist die Gerade g durch die Parametergleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden, also die Schnittpunkte der Geraden g mit der x-y-Ebene, mit der y-z-Ebene und mit der x-z-Ebene.

Lösung:
Zunächst wird die Gerade g definiert:
g(r) := [2; 4; 2] + r · [1; 1; −1]. Für ihren Spurpunkt in der x-y-Ebene muss gelten: $z = 2 - 1 \cdot r = 0$. Die Berechnung erfolgt mit solve(g(r)=[x;y;0],r); es ergibt sich: r = 2, x = 4, y = 6. Einsetzen in g(r) liefert die Spurpunktkoordinaten $S_{xy}(4|6|0)$.
Entsprechend erhält man mit der Eingabe solve(g(r)=[x;0;z],r) den Spurpunkt $S_{xz}(-2|0|6)$, mit solve(g(r)=[0;y;z],r) ergibt sich der Spurpunkt $S_{yz}(0|2|4)$.



Übung 1

Liegt P(4|4|3) auf der Strecke $\overline{AB}$ mit A(3|2|4) und B(6|8|1)?

Übung 2

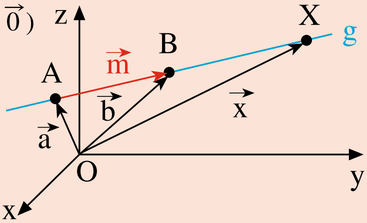
Sei A(3|2|4), B(6|8|1) und C(4|6|3). Bestimmen Sie D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

Überblick

Parametergleichung einer Geraden:

g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m} \quad (r \in \mathbb{R}, \vec{m} \neq \vec{0})$

Stütz-vektor Richtungs vektor



Zweipunktegleichung:

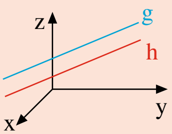
g: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \quad (r \in \mathbb{R})$
$\vec{a}$, $\vec{b}$ sind die Ortsvektoren zweier Geradenpunkte A und B.

Koordinatengleichung der Geraden in der Ebene:

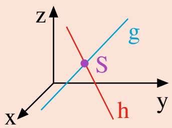
$ax + by = c$ bzw. $y = mx + n \quad (a, b, c, m, n \in \mathbb{R}, b \neq 0)$

Lagebeziehung von zwei Geraden im Raum:

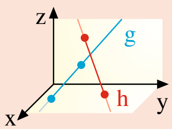
Die Geraden sind entweder parallel (oder sogar identisch) oder sie schneiden sich in genau einem Punkt oder sie sind windschief.



1. Fall: parallel (im Sonderfall: identisch)
Die Richtungsvektoren beider Geraden sind kollinear.
Liegt der Stützpunkt einer Geraden auch auf der anderen Geraden, sind die Geraden sogar identisch.



2. Fall: schneidend
Die Richtungsvektoren der Geraden sind nicht kollinear.
Man setzt die rechten Seiten der Parametergleichungen gleich und löst das entstehende eindeutig lösbare LGS.
Die Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

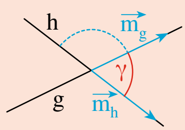


3. Fall: windschief
Die Richtungsvektoren der Geraden sind nicht kollinear.
Man setzt die rechten Seiten der Parametergleichungen gleich.
Das entstehende LGS ist unlösbar.

Winkel zwischen Geraden:

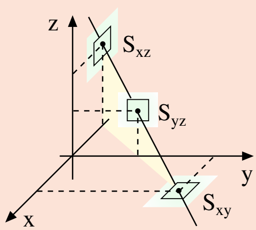
Der **Schnittwinkel** γ von zwei Geraden g und h wird mit folgender Formel berechnet:

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{m}_g \cdot \vec{m}_h|}{|\vec{m}_g| \cdot |\vec{m}_h|}.$$



Spurpunkte einer Geraden:

Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen.
Bedingungen:
S_{xy}: $z = 0$
S_{xz}: $y = 0$
S_{yz}: $x = 0$



Test

Geraden

1. Geradengleichung, Punkt und Strecke
Gegeben sind die Punkte P(1|4|3), A(3|0|1) und B(0|6|4).
a) Stellen Sie eine Parametergleichung der Geraden g durch A und B auf.
b) Überprüfen Sie, ob der Punkt P auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

2. Relative Lage von Geraden, Spurpunkte
Gegeben sind die Geraden g und h.

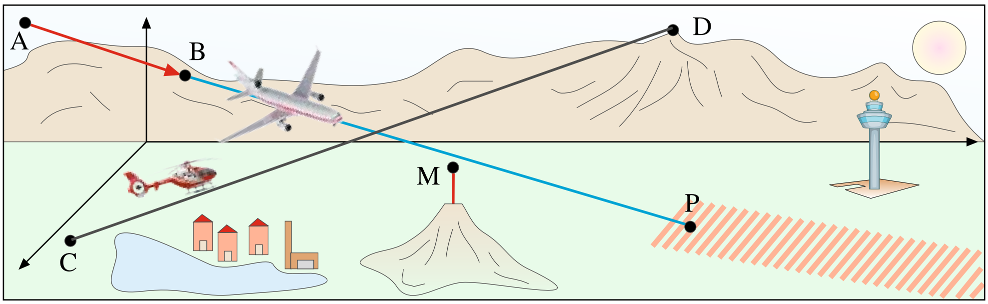
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der beiden Geraden.
b) Stellen Sie die Geraden räumlich dar.
c) Gesucht sind die Punkte, in denen die Gerade h die drei Koordinatenebenen durchdringt (Spurpunkte von h).

3. Geradenschar
Gegeben sind die Geradenschar g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 2a \end{pmatrix}$ und die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
a) Beschreiben Sie die Lage der Geraden der Schar g_a.
Zeichnen Sie die Geraden für a = −1, a = 0, a = 1 und a = 2 als Schrägbild.
b) Welche Gerade der Schar enthält den Punkt P(3|1|8)?
c) Für welchen Wert von a sind die Geraden g_a und h parallel?
d) Für welchen Wert von a schneiden sich die Geraden g_a und h? Berechnen Sie ggf. S.

4. Flugbahnen
Ein Flugzeug befindet sich mit konstanter Geschwindigkeit im Anflug auf die Landebahn. Um 16.00 Uhr hat es die Position A(4|0|6) erreicht, eine Minute später ist es an der Position B(5|3|4,5) angelangt. (Längen- und Positionsangaben in der Einheit km).



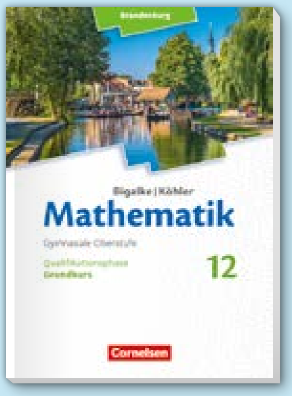
a) Wo liegt der theoretische Aufsetzpunkt P auf der Landebahn, die sich in Meereshöhe z = 0 befindet? Wie lange dauert der gesamte Anflug des Flugzeugs?
b) Das Flugzeug überfliegt den im Anflugbereich schwebenden Fesselballon mit dem Mittelpunkt M(6|6|2,9) und dem Durchmesser 20 m. Wieviel Sicherheitsabstand nach unten ist beim Überflug der Ballonposition noch vorhanden?
c) Zeitgleich mit dem Beginn des Landeanflugs in A startet ein Hubschrauber von der Ölplattform C(12|0|0) in Richtung der Bergstation D(−2|14|7). Für diesen Flug ist eine Flugzeit von exakt 5 Minuten vorgesehen. Befindet sich der Hubschrauber auf Kollisionskurs zur Bahn des Flugzeugs? Kommt es tatsächlich zur Kollision? Lösungen: S. ■■■

Die Ausgaben im Überblick für Brandenburg

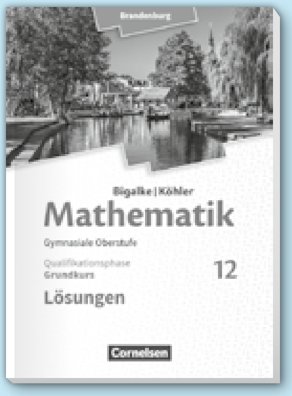
Neue Materialien für die 12. Klasse

Passgenau zum Lehrplan

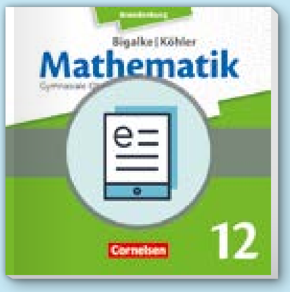
NEU Bigalke/Köhler: Mathematik
Ausgabe Brandenburg
12. Schuljahr, Grundkurs



Schülerbuch Grundkurs
Kartoniert
978-3-06-040667-8 25,99

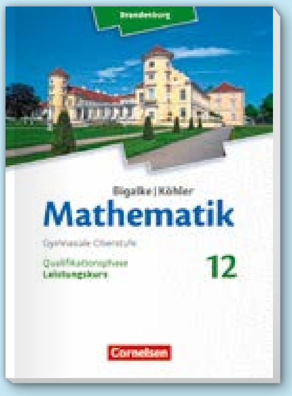


Lösungen zum Schülerbuch
Kartoniert
978-3-06-040671-5 19,99

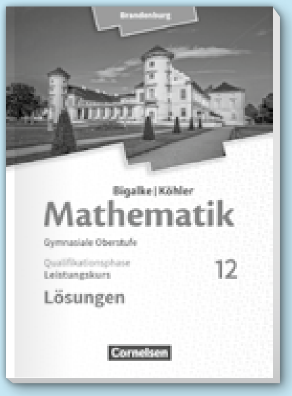


Schülerbuch – E-Book
Einzellizenz/1 Jahr/scook.de
978-3-06-040972-3 8,99

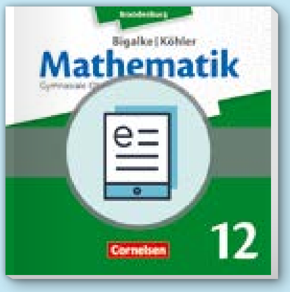
NEU Bigalke/Köhler: Mathematik
Ausgabe Brandenburg
12. Schuljahr, Leistungskurs



Schülerbuch, Leistungskurs
Kartoniert (Aug 2020)
978-3-06-040669-2 26,99



Lösungen zum Schülerbuch
Kartoniert (Sept. 2020)
978-3-06-040673-9 19,99



Schülerbuch – E-Book
Einzellizenz/1 Jahr/scook.de (Aug. 2020)
978-3-06-040974-7 8,99

Service Center
Telefon: 0800 12 120 20 (kostenlos aus dem dt. Festnetz)
+49 30 897 85-640 (Mobilfunknetz / Ausland)
Mo – Fr 8 – 18 Uhr (außerhalb dieser Zeit erreichen Sie unsere automatische Bestellannahme)
Fax: +49 30 897 85-578
E-Mail: service@cornelsen.de

Cornelsen Verlag
14328 Berlin
cornelsen.de

Preisangaben in € (D), Stand 1. 01. 2020. Preisänderung und Irrtum vorbehalten. Alle Preise enthalten die zzt. geltende Mehrwertsteuer.

P9702665 VBD 0720