Fokus Mathematik

Lehrerfassung

11 Gymnasium Bayern

mit DVD-ROM

Cornelsen

Multimediales Zusatzangebot

Zu den Stellen des Buches, die durch das CD-Symbol gekennzeichnet sind, gibt es ein über Mediencode verfügbares multimediales Zusatzangebot auf der dem Buch beiliegenden CD.

1. CD starten
2. Mediencode eingeben, z. B. 061-1

Erklärung der Abkürzungen:

LÖ ausgewählte Lösungen
DE didaktische Erläuterungen
DUP Digitaler Unterrichtsplaner
DUP 012-1 Verweist auf ein Medienelement zur Schulbuchseite 12 auf dem Digitalen Unterrichtsplaner
KV Kopiervorlage

Redaktion: Dr. Jürgen Wolff, Gudrun Schaeper, Dr. Peter Birnbaum
Layoutkonzept: Jürgen Brinckmann, Berlin
Herstellung: Hans Herschelmann
Bildrecherche: Peter Hartmann
Grafik: Wolfgang Mattern, Christian Görke
Illustration: Peter Menne, Potsdam
Umschlaggestaltung: Anna Bakalovic für Buchgestaltung +, Berlin
Technische Umsetzung: Arnold & Domnick,Verlagsproduktion – alle Medien, Leipzig

www.cornelsen.de

Unter der folgenden Adresse befinden sich multimediale Zusatzangebote für die Arbeit mit dem Schülerbuch:
www.cornelsen.de/fokus-mathematik
Die Buchkennung ist **MFK91510**.

1. Auflage, 1. Druck 2009

Alle Drucke dieser Auflage sind inhaltlich unverändert und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

Druck: CS-Druck CornelsenStürtz, Berlin

ISBN 978-3-06-009151-5 (Schülerbuch)
ISBN 978-3-06-009155-3 (Lehrerfassung)

Inhalt gedruckt auf säurefreiem Papier aus nachhaltiger Forstwirtschaft.

Aufträge

DE Auftrag 1 wird in Auftrag 2 des Abschnitts 3.2 aufgegriffen. Bei Zeitmangel ist es möglich, beide Aufträge gemeinsam zu behandeln und das Newton-Verfahren, das zur genauen Bestimmung des Gewinn-/Verlustbereichs erforderlich ist, in 3.1 zu integrieren.

LÖ Der Gewinn ist mit ca. 6000 € maximal bei einer Tagesproduktion von ca. 1130 Stück.

3.1 Untersuchung von Funktionen

Auftrag 1 Gewinnmaximierung

Das Management einer Firma überlegt, die Produktion eines Produkts hochzufahren, um den Gewinn, d. h. die Differenz aus Einnahmen und Kosten, in dieser Produktsparte zu maximieren. Dazu ist es hilfreich, die Gewinnfunktion G für dieses Produkt genauer zu analysieren, z. B.

- die Bereiche zu ermitteln, in denen die Produktion Verluste verursacht;
- zu untersuchen, bis zu welcher Tagesproduktion der Gewinn steigt und ab welcher Tagesproduktion der Gewinn wieder sinkt;
- zu berechnen, ob es eine Tagesproduktion gibt, bei der der Gewinn maximal wird.

Als Basis für die Entscheidung liegen dem Management folgende Informationen vor:

- Wird die Tagesproduktion in 100 Stück mit x bezeichnet, so werden die Gesamtkosten $K(x)$ in 1000 € durch die Funktion

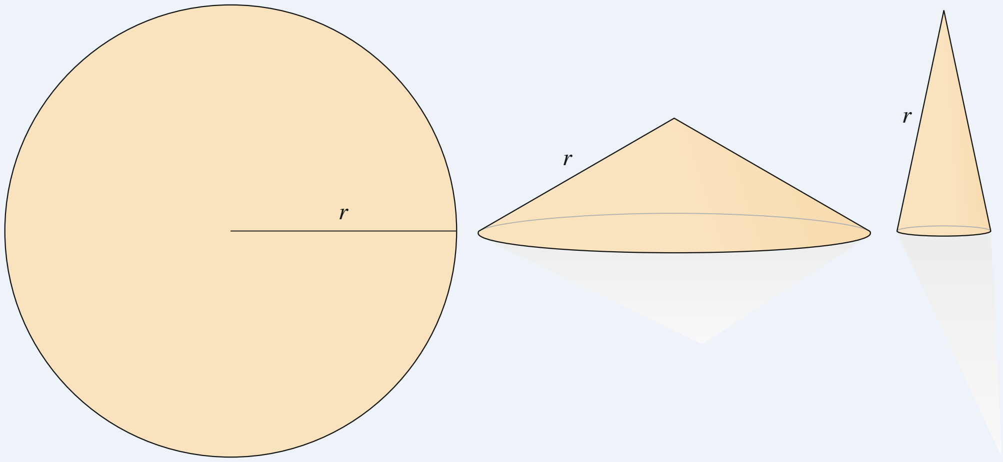
$$K: x \mapsto 0{,}05x^3 - x^2 + 7{,}5x + 10$$

beschrieben;

- den Einnahmen liegt ein geschätzter Verkaufspreis von 40 € pro Stück zugrunde.

Auftrag 2 Volumenmaximierung

Aus einem kreisrunden Blatt Papier, das längs eines Radius aufgeschnitten ist, kann man Kegel unterschiedlicher Höhe h herstellen.



76/1

Berechnen Sie zunächst das Volumen des Kegels, den man für $r = 20\,\text{cm}$ bei der Höhe 8 cm erhält. Geben Sie dann allgemein einen Term $V(h)$ an, der das Volumen des Kegels für $r = 20\,\text{cm}$ bei der Höhe h beschreibt.

DE Aufgabe 30 hat eine ähnliche Aufgabenstellung.

$V(h)$ lässt sich als Wert der Funktion V interpretieren, die bei vorgegebenem Radius jeder geeigneten Höhe h das zugehörige Volumen zuordnet. Geben Sie die Funktion V an, skizzieren Sie deren Graphen und berechnen Sie, für welche Höhe sich ein Kegel maximalen Volumens ergibt.

Aufträge

Auftrag 3 Funktionen für eine Schulaufgabe gesucht

Eine Mathematiklehrerin sucht für eine Schulaufgabe in der 11. Klasse geeignete Funktionen. Die Schülerinnen und Schüler sollen anhand ganzrationaler Funktionen zeigen, dass sie die Zusammenhänge zwischen einer Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' verstanden haben. Sie denkt dabei an drei verschiedene kubische Funktionen.

- Der Graph einer Funktion soll an der Stelle -2 einen Hochpunkt und an der Stelle 3 einen Tiefpunkt haben; gleichzeitig sollen die Schüler in der Lage sein, die Nullstellen der Funktion zu berechnen.
- Der Graph einer zweiten Funktion soll an der Stelle 0 einen Tiefpunkt mit Funktionswert 0 und an der Stelle 3 einen Hochpunkt besitzen.
- Der Graph einer dritten Funktion soll an der Stelle 2 eine waagrechte Tangente haben, aber weder Hochpunkt noch Tiefpunkt besitzen.

Machen Sie geeignete Vorschläge.

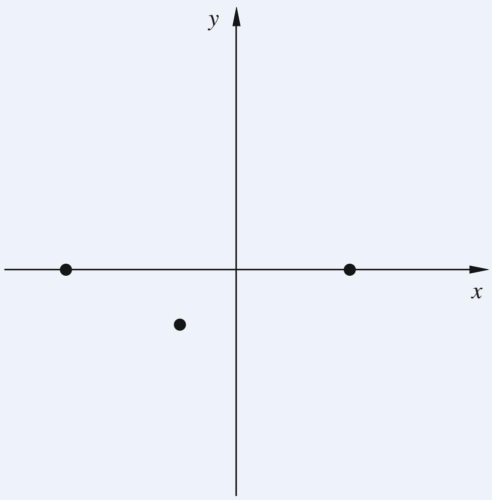
DE Auftrag 3 eignet sich auch für Gruppenarbeit. Ähnliche Fragestellungen haben die Aufgaben 6 und 15.

Auftrag 4 Graph gesucht

Die im Bild 77/1 eingetragenen Punkte liegen auf dem Graphen der Funktion

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2.$$

Ergänzen Sie die fehlende Skalierung der Achsen und markieren Sie die Intervalle, in denen der Graph oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse verläuft.
Zeigen Sie, dass sich durch die bisher bekannten Punkte noch ganz verschiedene Funktionsgraphen zeichnen lassen, die dennoch alle die schon bekannten Eigenschaften des Graphen der Funktion f haben.
Warum ist eine Wertetabelle allein prinzipiell nicht ausreichend, um den Graphen der Funktion genau zeichnen zu können?



77/1

Benützen Sie jetzt Ihre Kenntnisse aus Kapitel 2, um das Verhalten des Graphen von f an einzelnen Stellen und auch den gesamten Verlauf des Graphen von f möglichst genau zu beschreiben, und skizzieren Sie dann den Graphen der Funktion f.

DE Auftrag 4 lässt sich auch als Einzelarbeit oder als Hausaufgabe bearbeiten. In diesem Auftrag wird besonders deutlich, dass eine Wertetabelle nur unzureichend Informationen über einen Funktionsgraphen liefert.

LÖ
Nullstellen:
-3 und 2.
$f(-1) = -1$

▶ **Auftrag 2** wird bei der Erarbeitung verwendet.

▶ Bestimmung einer Extremstelle

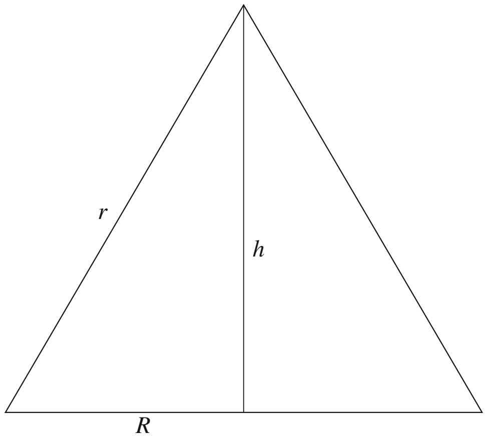
Sind R und h der Grundkreisradius bzw. die Höhe des Kegels, so erhält man das Volumen V des Kegels mit der Formel $V = \frac{1}{3}R^2 \cdot \pi \cdot h$.

R lässt sich mithilfe des Satzes des Pythagoras in Abhängigkeit von der Länge der Mantellinie r und der Höhe h des Kegels angeben: $R = \sqrt{r^2 - h^2}$. Für $r = 20\,\text{cm}$ ergibt sich also (ohne Einheiten):

$$V = \frac{1}{3}(400 - h^2) \cdot \pi \cdot h,$$

d. h. für die Funktion

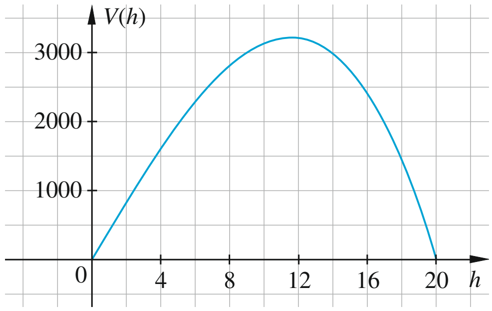
$$V\colon h \mapsto \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (400 - h^2) \cdot h$$



78/1

ist eine Maximumstelle zu bestimmen. Dabei ist die Definitionsmenge für V das Intervall $[0; 20]$. Für die beiden Randwerte $h = 0$ und $h = r$ entartet der Kegel zu der gegebenen Kreisfläche bzw. zu einer Strecke. Da in diesen beiden Fällen das Volumen gleich 0 wird, an anderen Stellen der Definitionsmenge aber positive Werte annimmt, ist anschaulich klar, dass das Volumen V in diesem Intervall einen maximalen Wert annehmen muss.

Eine Skizze des Graphen der Funktion V bestätigt dies und zeigt zusätzlich, dass die gesuchte Maximumstelle h_0 zwischen $h = 11$ und $h = 12$ liegt.
Mit den Kenntnissen aus Kapitel 2 können Sie h_0 berechnen. Nach Satz 2.3 ist h_0 eine Nullstelle der Ableitung der Funktion V.
Anhand des Steigungsverhaltens in einer Umgebung von h_0 kann man durch Rechnung überprüfen, ob es sich tatsächlich um eine Maximumstelle handelt.



78/2

Um die Ableitung der Funktion V zu berechnen, formt man $V(h)$ zunächst um:

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (400 - h^2) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi\,(400h - h^3)$$

und erhält für die Ableitung

$$V'(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi\,(400 - 3h^2)$$

V' ist eine quadratische Funktion, deren Nullstellen sich elementar berechnen lassen.

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi\,(400 - 3h^2) = 0 \Leftrightarrow h^2 = \frac{400}{3} \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{\frac{400}{3}} \Leftrightarrow h = \pm\frac{20}{3}\sqrt{3}.$$

Die negative Lösung liegt nicht in der Definitionsmenge der Funktion V, also kommt nur

$$h_0 = \frac{20}{3}\sqrt{3} \approx 11{,}55$$

als **lokale Extremstelle** in Frage.

DUP 078-0

Das Volumen V muss aus geometrischen Gründen für diesen Wert von h_0 ein Maximum annehmen. Um das auch rechnerisch zu bestätigen, liest man das Steigungsverhalten des Graphen von V am besten an einer **Vorzeichentabelle** für $V'(h)$ ab. Da der Graph von V' Teil einer nach unten geöffneten Parabel mit dem Scheitel an der Stelle 0 und den Nullstellen $\pm\frac{20}{3}\sqrt{3}$ ist, kann man die Vorzeichentabelle ohne weitere Rechnung angeben:

DE Eine Vorzeichentabelle für die Ableitung ist das Standardinstrument in Jahrgangsstufe 11. Ihr Erstellen sollte ausführlich besprochen und geübt werden.

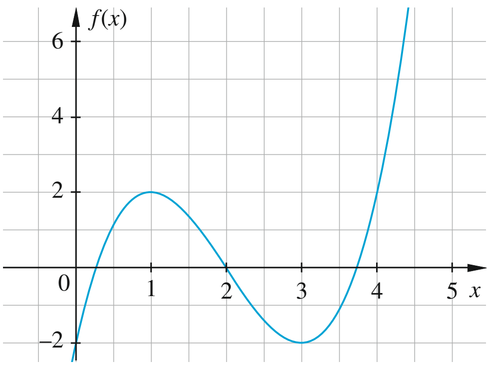
h	$0 < h < \frac{20}{3}\sqrt{3}$	$\frac{20}{3}\sqrt{3} < h < 20$
Vorzeichen von $V'(h)$	+	–

Der Graph von V steigt also monoton im Intervall $0 < h < \frac{20}{3}\sqrt{3}$ und fällt monoton im Intervall $\frac{20}{3}\sqrt{3} < h < 20$, also ist $h_0 = \frac{20}{3}\sqrt{3}$ lokale Maximumstelle von V. Setzt man h_0 in die Funktion V ein, so erhält man das maximale Volumen mit ca. 3224,5 Volumeneinheiten.

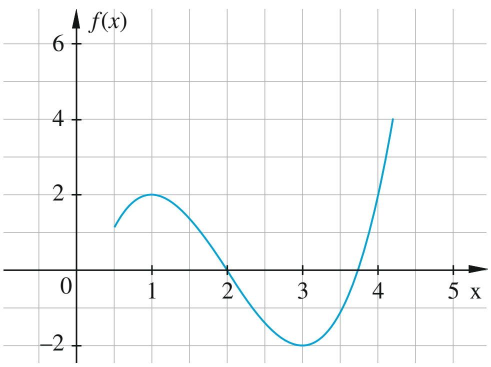
▶ Globale Extrema

Insbesondere in Anwendungen interessiert man sich meist für **globale Extrema**, d. h. für solche Stellen der Definitionsmenge, an denen der Funktionswert den größtmöglichen Wert überhaupt annimmt. Bei der Funktion V des Auftrags ist unmittelbar klar, dass es sich bei h_0 um die **globale Extremstelle** von V handelt, da V an den Rändern der Definitionsmenge den Wert 0 annimmt. Die folgenden drei **Beispiele** von Graphen zeigen jedoch, dass ein globales Extremum – sofern es überhaupt existiert – ein lokales Extremum sein kann, aber auch ein **Randextremum**. Sucht man ein globales Extremum, so muss man also die Funktionswerte an den lokalen Extremstellen noch mit den Werten an den Rändern der Definitionsmenge vergleichen.
1) Die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bild 79/1 zeigt einen Teil des Graphen von f. Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Die Funktion f besitzt also weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum.

DE Vgl. Aufgaben 2 und 4.



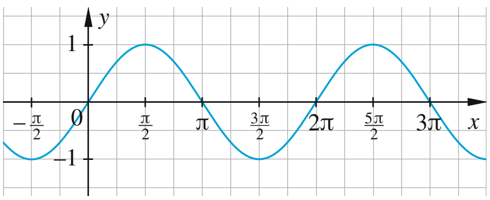
79/1



79/2

2) Bild 79/2 zeigt den Graphen der Funktion zu $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ und der Definitionsmenge $[0,5; 4,5]$. Mit der eingeschränkten Definitionsmenge ist die lokale Minimumstelle gleichzeitig globale Minimumstelle, globale Maximumstelle ist die rechte Randstelle 4,5.

3) Bei der Sinusfunktion (Bild 79/3) sind alle lokalen Maximumstellen zugleich globale Maximumstellen, alle lokalen Minimumstellen zugleich globale Minimumstellen.



79/3

Aufgaben

Erarbeiten Anwenden Vernetzen

DE Die Aufgaben 1 bis 4 üben Grundfertigkeiten. Man kann eventuell die Aufgaben auf Gruppen verteilen, die Lösungen ausarbeiten lassen und die korrigierten Lösungen vervielfältigen.
080-1

1 Geben Sie das Steigungsverhalten der Graphen der Funktion f in Form einer Tabelle an. Welche weiteren Folgerungen können Sie aus der Tabelle ziehen?

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$
b) $f(x) = x^5 - x + 1$
c) $f(x) = x^2 + \cos x$
d) $f(x) = 2x^4 - 4x^3$
e) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$
f) $f(x) = \sin x + \cos x$

2 Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima der Funktion f. Handelt es sich dabei auch um globale Extrema?

a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$
b) $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{9}{4}x$
c) $f(x) = \sin x - 0{,}5x$
d) $f(x) = 12x + 2x^4$
e) $f(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{2}{x}$
f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$

3 Diskutieren Sie (wie in der Zusammenfassung von Kapitel 3; vgl. Seite 94 und 95) die Funktion f und zeichnen Sie ihren Graphen.

a) $f(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - 16)$
b) $f(x) = (x + 2) \cdot (x - 4)^2$
c) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$
d) $f(x) = (x - 3)^2 \cdot (x^2 + 2x + 3)$
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x$
f) $f(x) = \frac{1}{8}(x^5 - 4x^4 + 2x^3)$

4 Bestimmen Sie in dem angegebenen Intervall den größten und den kleinsten Funktionswert der Funktion f.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x;\ x \in [-2; 4]$
b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x;\ x \in [-3; 1]$
c) $f(x) = 3x^4 - 8x^3;\ x \in [0; 3]$
d) $f(x) = x - \sin x;\ x \in [0; \pi]$
e) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{x^2}{2};\ x \in [-2; 0]$
f) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1;\ x \in [-3; 5]$

080-2
DE Einfache Funktionenscharen können Bestandteil von Abituraufgaben sein (vgl. auch Aufgaben 16 und 22).

5 Welche reellen Zahlen kann man für den Parameter k einsetzen, damit die Funktion $f: x \mapsto x^3 + kx + 1$ zwei Extremstellen besitzt?
Für welchen Wert von k hat der Graph von f einen Terrassenpunkt?

DE Aufgabe 6 erfordert das Verständnis für den Zusammenhang zwischen f und f'.

6 Geben Sie eine passende Funktion an. Können Sie mehrere Funktionen mit den beschriebenen Eigenschaften finden? Worin unterscheiden sie sich?

a) Die ganzrationale Funktion f vom Grad 4 hat an den Stellen −2 und 2 lokale Minimumstellen, an der Stelle 0 eine lokale Maximumstelle mit $f(0) = 2$.
b) Der Graph der ganzrationalen Funktion f vom Grad 3 hat weder Hoch- noch Tiefpunkt, aber an der Stelle 3 einen Terrassenpunkt mit $f(3) = -1$.
c) Die ganzrationale Funktion f vom Grad 4 hat an der Stelle 2 ein lokales Extremum, an der Stelle −1 die Ableitung 0, aber kein lokales Extremum. Die Tangente an der Stelle 1 hat die Steigung 1. Ist die Art des Extremums an der Stelle 2 dadurch festgelegt?

DE Aufgabe 7 führt auf ein 2-2-Gleichungssystem (s. a. Abschnitt 8.1).
LÖ $a = 1;\ b = -1$

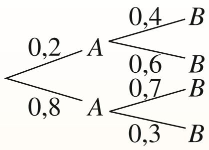
7 Bestimmen Sie die Werte für a und b so, dass der Graph von $f: x \mapsto ax^4 + bx^2 + 4$ an der Stelle 1 die Steigung 2 hat und $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ eine Extremstelle von f ist. Kann man die Bedingungen auch dahingehend verschärfen, dass die Stelle $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ eine Minimumstelle ist?

DE Definition des Begriffs „Berühren" in Aufgabe 8.

8 Man definiert: Die Graphen zweier Funktionen f und g berühren sich an der Stelle a, wenn $f(a) = g(a)$ und $f'(a) = g'(a)$. Das bedeutet nichts anderes, als dass die Graphen an der Stelle a dieselbe Tangente haben. Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto 0{,}5x^3 + x^2$ und $g: x \mapsto 2x^2 + 2x - 4$ im Punkt $(2|8)$ berühren, der Graph von f aber für $x \geq 0$ stets oberhalb des Graphen von g verläuft.

9 Zeigen Sie, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades entweder einen Tief- und einen Hochpunkt oder genau einen Terrassenpunkt oder aber keinen solchen Punkt hat.

Noch fit?



I Berechnen Sie aus dem nebenstehenden Baumdiagramm $P_B(A)$.

II Zwei Laplace-Würfel werden gleichzeitig geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme gerade, wenn die beiden Würfel zwei verschiedene Zahlen zeigen?

III In einem Umschlag befinden sich 3 Karten, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden: Eine Karte ist auf beiden Seiten blau, eine ist beidseitig rot, die dritte Karte ist auf der einen Seite blau, auf der anderen rot. Aus dem Umschlag wird blind eine Karte gezogen und auf den Tisch gelegt. Ihre sichtbare Seite ist blau. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist auch die verdeckte Seite blau?

Erarbeiten | **Anwenden** | Vernetzen

10 Geben Sie die Funktionsvorschriften für wenigstens drei Funktionen an, die an der Stelle 2 zwar die Ableitung 0, aber kein Extremum haben.

11 Zeigen Sie mithilfe des globalen Monotoniesatzes, dass die Ungleichung gilt.
a) $x^3 - x^2 \geq 0$ für $x \geq 1$
b) $x^4 - 6x^2 + 8x + 15 \geq 16x - 9$ für $x \in \mathbb{R}$
c) $x^5 - 3x^2 + 16 \geq 0$ für $x \geq 2$
d) $x^4 \geq 4x - 3$ für $x \in \mathbb{R}$

12 Beweisen Sie, dass für natürliche Zahlen $n > 1$ und reelle Zahlen $x \geq 0$ gilt:
$x^n \geq 1 + n(x - 1)$. **(Bernoulli'sche Ungleichung)**

DE Üblicherweise lautet die Bernoulli'sche Ungleichung $(1 + x)^n > 1 + xn$ ($n \in \mathbb{N}$; $n > 1$; $x \neq 0$ $x > -1$), dann müsste man aber $(1 + x)^n$ ableiten können.

13 Beweisen Sie: Sind die zwei Funktionen f und g im Intervall $[a; b]$ differenzierbar mit $f(a) = g(a)$ und $f'(x) > g'(x)$ für alle $x \in [a; b]$, dann verläuft der Graph von f im Intervall $[a; b]$ oberhalb des Graphen von g. Veranschaulichen Sie die Situation auch an einer Skizze.

14 Wie viele Extremstellen kann eine ganzrationale Funktion vom Grad n haben? Geben Sie für $n = 3$ und $n = 4$ für jede mögliche Anzahl von Extremstellen eine passende Funktion an.

DE Aufgabe 14 ergibt einen Überblick darüber, wie Graphen ganzrationaler Funktionen 3. und 4. Grades aussehen können.

15 Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades hat folgende Eigenschaften: Die Punkte $(-1|3)$ und $(3|3)$ sind Hochpunkte, der Punkt $(1|-2)$ ist Tiefpunkt des Graphen.
a) Skizzieren Sie einen passenden Graphen.
b) Wie viele Nullstellen muss diese Funktion haben? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Skizzieren Sie Graphen von Funktionen, die genau diese drei Extrema haben, aber nicht notwendig ganzrational sind.

DE Vgl. auch Auftrag 3 und Aufgabe 6.

16 Für welche Werte des Parameters $c \in \mathbb{R}$ hat f genau drei (zwei, eine, keine) Nullstellen?
a) $f\colon x \mapsto 0{,}5x^3 - x^2 + 2x + c$
b) $f\colon x \mapsto 0{,}5x^3 + 0{,}75x^2 - 3x + c$

DE Als Tipp zu Aufgabe 16 kann die Betrachtung der Lage möglicher Extrempunkte gegeben werden.

17 Welche Bedingung müssen die Koeffizienten a, b, c und d einer kubischen Funktion $f\colon x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) erfüllen, damit der Graph genau zwei verschiedene Extrempunkte besitzt?

18 Beweisen Sie! (vgl. Aufgabe 13)
a) Für alle $x \in [0; \infty]$ gilt $\sin x \leq x$.
b) Für alle $x \in [0; \infty]$ gelten die folgenden Ungleichungen:
$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, $\quad \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$, $\quad \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

DE Die recht anspruchsvolle Aufgabe 18 mündet bei Weiterführung in die Reihenentwicklung von Sinus und Kosinus.

DE Sehr offene Aufgabenstellung: Man sollte die Schülerinnen und Schüler ermuntern, nicht nur ganzrationale Funktionen zu betrachten.

19 Geben Sie eine Funktion f an, deren Steigungsverhalten durch die angegebene Tabelle beschrieben wird.

a)

Bereich für x	$-\infty < x < 3$	$3 < x < 8$	$8 < x < \infty$
Steigungsverhalten des Graphen	↗	↘	↗

b)

Bereich für x	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < \infty$
Steigungsverhalten des Graphen	↗	↗

c)

Bereich für x	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 7$	$7 < x < \infty$
Steigungsverhalten des Graphen	↗	↗	↘	↘

DE Anspruchsvolle Aufgabe.

LÖ

20 Entscheiden Sie, ob die Aussage richtig oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Wenn die Graphen der Funktionen f und g an der Stelle 3 jeweils einen Hochpunkt haben, so hat auch der Graph von $f + g$ dort einen Hochpunkt. Richtig.

b) Wenn die Graphen der Funktionen f und g an der Stelle 3 jeweils einen Hochpunkt haben, so hat auch der Graph von $f \cdot g$ dort einen Hochpunkt. Falsch.

c) Wenn 3 eine lokale Minimumstelle der Funktion f ist, dann ist 3 eine lokale Maximumstelle der Funktion $\frac{1}{f}$. Falsch.

LÖ Eine solche Funktion gibt es nicht.

DE Aufgabe 21 ist anspruchsvoll. Sie erfordert einen vollständigen Überblick über mögliche Nullstellen einer ganzrationalen Funktion 4. Grades.

21 Gibt es eine ganzrationale Funktion vom Grad 5, die genau eine lokale Extremstelle hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

22 Gegeben ist die Schar $f_t\colon x \mapsto x^3 + tx^2 + (2t - 1)x + 5$ von Funktionen mit dem reellen Parameter t.

a) Für welche t sind die Graphen der Schar streng monoton steigend?

b) Gibt es Werte für t, für die der Graph streng monoton fällt?

DE In Aufgabe 23 werden der Satz des Pythagoras und seine Anwendungen wiederholt.

23 Welcher Punkt des Graphen der Funktion f hat von dem Punkt P den geringsten Abstand?

a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$; $P(1|0)$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $P(1|1)$

Erarbeiten Anwenden **Vernetzen**

24 Bei der Produktion eines Gutes sind die folgenden drei Funktionen entscheidend für die Rentabilität:

- die gesamten Produktionskosten $K\colon x \mapsto K(x)$,
- die Stückkosten $k\colon x \mapsto \frac{K(x)}{x}$,
- die Erlösfunktion $E\colon x \mapsto p \cdot x$.

Dabei steht x für die Anzahl der produzierten Einheiten, p für den Verkaufspreis pro Einheit.
Begründen Sie folgende Aussagen:

- Der Mindestverkaufspreis $p_{\min}$ dafür, dass das Unternehmen verlustfrei produziert, ist der minimale Funktionswert der Stückkostenfunktion.
- Für $p \geq p_{\min}$ erzielt das Unternehmen den maximalen Gewinn, wenn die Produktionsmenge x so gewählt wird, dass $K'(x) = p$ ist.

Die Produktionskosten einer Firma werden durch die Funktion $K\colon x \mapsto \frac{2}{45}x^3 - 2x^2 + 60x + 600$ beschrieben.

a) Ermitteln Sie näherungsweise den Verkaufspreis, den die Firma erzielen muss, um ohne Verlust zu arbeiten.

b) Bei welcher Produktionsmenge erzielt die Firma bei einem Verkaufspreis von $p = 150$ einen maximalen Gewinn?

25 a) Zerlegen Sie die Zahl 30 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer Quadrate minimal wird.

b) Lösen Sie die Aufgabe für eine beliebige Zahl c.

26 Bei manchen Funktionen ist es schwierig, die Nullstellen zu ermitteln. Mithilfe der Untersuchung des Steigungsverhaltens kann man bei der Funktion f aber Aussagen über die Anzahl und die ungefähre Lage von Nullstellen machen.

a) $f(x) = x^3 + 3x + 5$ b) $f(x) = 5x^4 + 4x^5 - 1$ c) $f(x) = x^5 - 5x + 5$

27 Eine differenzierbare Funktion f hat die Nullstellen -3 und 0. Ihre Ableitung ist an beiden Stellen größer als 0. Begründen Sie, dass in dem Intervall $[-3; 0]$ noch wenigstens eine weitere Nullstelle liegen muss. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass diese Aussage nicht richtig ist, wenn man die Voraussetzung fallen lässt, dass f differenzierbar ist.

DE Die Aufgaben 26 und 27 sind eine gute Übung, rechnerische Ergebnisse zu bewerten und weitere Einsichten argumentativ zu gewinnen.

28 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und untersuchen Sie f auf lokale und globale Minima und Maxima.

a) $f(x) = |x - 1|$ b) $f(x) = 1 - |x|$ c) $f(x) = |x^2 - 2|$ d) $f(x) = 3 - |x^2|$

DE Aufgabe 28 zeigt, dass die Differenzierbarkeit keine notwendige Voraussetzung für das Vorliegen einer Extremstelle ist.

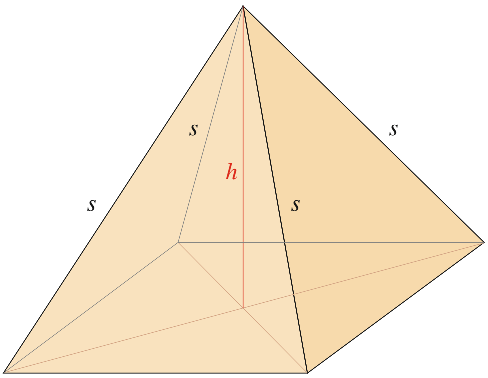
29 Manchmal lohnt es sich, vor dem schematischen Anwenden von Routinen vorab den Funktionsterm etwas genauer anzusehen. Bestimmen Sie das Steigungsverhalten sowie Lage und Art der Extremstellen der Funktion f.

a) $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$ b) $f(x) = \frac{3}{1 + x^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^3$

30 Vier Metallstützen der gleichen Länge s sollen zu einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche zusammengestellt werden (Bild 83/1). Dabei ergeben sich je nach der Größe der Grundfläche offensichtlich verschiedene Pyramidenhöhen h und damit verschiedene Volumina der Pyramide.

a) Zeigen Sie, dass es eine Höhe h geben muss, sodass das Volumen der Pyramide maximal wird.

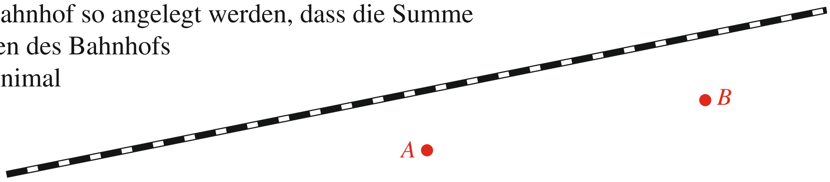
b) Berechnen Sie h so, dass das Volumen maximal wird. Wie groß ist das maximale Volumen?



83/1

31 Ein Landwirt möchte auf einer Wiese ein rechteckiges Stück als Pferdekoppel einzäunen. Sein Sohn macht sich ans Werk und setzt etwas voreilig ein gerades Stück Zaun von 100 m Länge. Sein Vater ist nicht sehr erfreut, denn er hat nur Material für insgesamt 300 m Zaun und wollte damit ein Rechteck mit möglichst großer Fläche einzäunen. Welches Vorgehen würden Sie dem Landwirt und seinem Sohn empfehlen?

32 Nicht immer muss man die Differentialrechnung anwenden, um Extremalprobleme zu lösen:
In der Nähe einer Bahnlinie liegen die beiden Orte A und B. Für sie soll ein gemeinsamer Bahnhof so angelegt werden, dass die Summe der Entfernungen des Bahnhofs von A und B minimal wird.

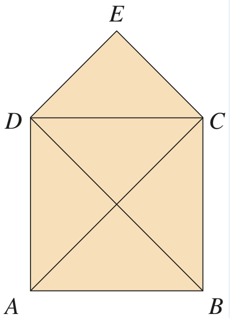


7.1 Das dreidimensionale Koordinatensystem

DE Alle vier Aufträge führen auch bei selbstständiger Bearbeitung und geringem zeitlichen Aufwand auf alle zu arbeitenden Begriffe.

Auftrag 1 Das – ist – das – Haus – vom – Ni – ko – laus

Die acht Silben dieses Satzes deuten auf die acht Strecken hin, mit denen man die Figur von Bild 184/1 ohne Absetzen, aber auch ohne eine der Strecken mehrfach zu durchlaufen, zeichnen kann. Finden Sie mehrere Möglichkeiten für derartige Streckenzüge und erläutern Sie Bedingungen, die ein Startpunkt erfüllen muss.

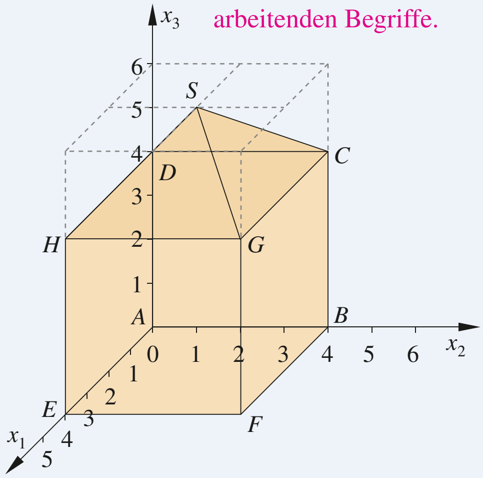


184/1: Das ebene „Haus vom Nikolaus“

DE Animation unter http://www.druki.de/nikohaus.htm.

Ist es möglich, ein räumliches „Haus vom Nikolaus“ in gleicher Weise zu zeichnen? Verwenden Sie dazu ein Koordinatensystem wie in Bild 184/2.

LÖ Die Anzahl der auslaufenden Kanten ist bei Start und Ziel ungerade, sonst gerade.



184/2: Ein räumliches „Haus vom Nikolaus“

Auftrag 2 Ein Würfel in der Brotschneidemaschine

Schneidet man einen Würfel senkrecht zu einer seiner Raumdiagonalen eben durch, erhält man überraschende Schnittfiguren.

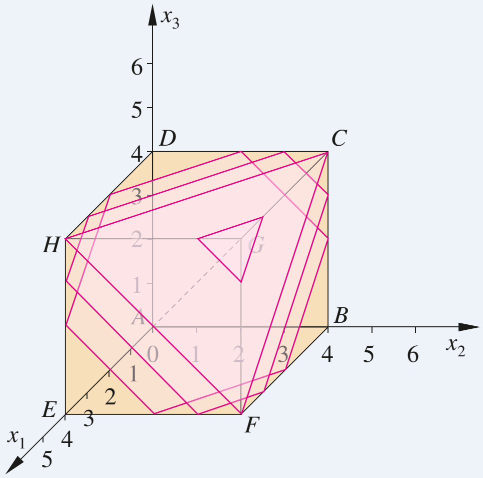
DE Hilfsmittel: Blumensteckschwamm, Styropor o. Ä. sowie Messer.

Experimentieren Sie zunächst mit einem Würfel aus Blumensteckschwamm oder ähnlich leicht zu bearbeitendem Material und trennen Sie nach und nach parallele Scheiben davon ab. Übertragen Sie dazu die Zeichnung ins Heft.

Beschreiben Sie alle vorkommenden Schnittfiguren.

Bestimmen Sie bei den auftretenden regelmäßigen Vielecken die Koordinaten ihrer Eckpunkte und ihres Schnittpunktes mit der Raumdiagonalen $[AG]$. Welchen Abstand hat der Punkt G von A? Welche Bedingung erfüllen die Koordinaten aller weiteren Punkte, die den gleichen Abstand von A besitzen wie G (also die Kugel um A mit Radius $r = \overline{AG}$)?

LÖ $\overline{GA} = 4\sqrt{3}$
Kugelgleichung: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 48$



184/3

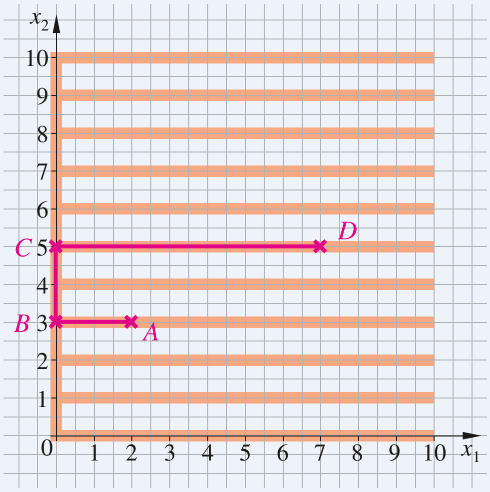
Auftrag 3 Automatisierte Lagerhaltung

In einer Lagerhalle (Länge, Breite, Höhe je 10) fährt ein Gabelstapler zunächst im Vordergrund vom links gelegenen Ein- und Ausgabepunkt $(x_1|x_2|x_3) = (0|0|0)$ bis zur Regalreihe Nummer x_2. In dieser Reihe fährt er nach hinten bis zum Regal Nummer x_1; dabei hebt oder senkt er nach Bedarf gleichmäßig seine Gabel bis zur Höhe x_3 und greift die gewünschte Palette auf bzw. stellt die Ladung an anderer Stelle in der Halle ab.

Der Gabelstapler soll nun eine Palette von $A(2|3|6)$ nach $D(7|5|1)$ bringen, muss aber wegen der Anordnung der Regalwände immer zunächst bis in die Ebene $x_1 = 0$ herausfahren, dann die richtige Reihe ($x_2 = 5$) ansteuern und dort wieder bis $x_1 = 7$ hineinfahren (vgl. Grundriss Bild 185/1).

Bestimmen Sie die bei gleichmäßiger Höhenänderung auftretenden Knickpunkte B und C der Palettenbahn sowie deren Länge.

Um Kabelsalat zu verhindern, wird der Gabelstapler über Funk angesteuert. Der Sender befindet sich in der Mitte der Halle in $M(5|5|5)$. Bestimmen Sie die Mindestreichweite r des Senders und beschreiben Sie die Menge aller Punkte P am Rand des Sendebereichs durch eine Gleichung.

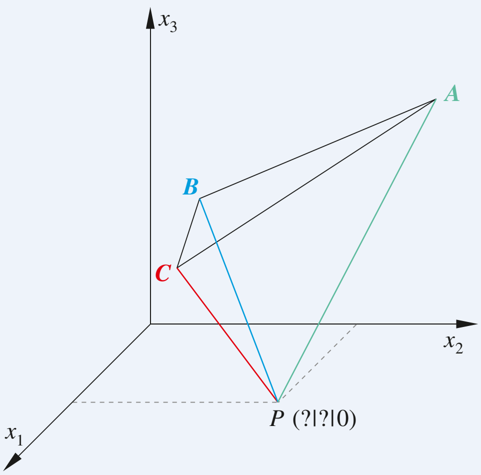


185/1

LÖ Die Länge der Palettenbahn ist $\sqrt{146}$ und in der Projektion ($x_3 = 0$) 11. Also ist wegen $a_3 - d_3 = 5$ je LE in dieser Projektion $\Delta x_3 = \frac{5}{11}$.
$B\left(0|3|6 - 2 \cdot \frac{5}{11}\right)$
$C\left(0|5|1 + 7 \cdot \frac{5}{11}\right)$
$r = 5\sqrt{3}$
$(p_1 - 5)^2 + (p_2 - 5)^2 + (p_3 - 5)^2 = 75$

Auftrag 4 Das Prinzip von GPS

Kraftfahrzeuge verfügen häufig über ein Navigationssystem mit GPS (Global Positioning System), dessen stark vereinfachte Funktionsweise hier erarbeitet werden soll. Befindet sich ein Fahrzeug mit GPS-Empfänger in P, so kann es von drei Satelliten (hier in A, B und C), die nicht auf einer Geraden und nicht in einer Ebene mit P liegen, Signale empfangen. Hier ist es sinnvoll, zusätzlich zu den Koordinaten x_1 und x_2 in der Ebene eine dritte Koordinate einzuführen, die die Höhe x_3 über dieser Ebene (nicht über der gekrümmten Erdoberfläche!) angibt. In diesem räumlichen Koordinatensystem sind die Punkte $A(14|19|99)$, $B(5|7|12)$ und $C(14|19|21)$ bekannt, in denen die GPS-Satelliten stehen. Mithilfe der Laufzeiten der Signale ergeben sich die Abstände $\overline{PA} = 101$, $\overline{PB} = 13$ und $\overline{PC} = 29$. Bestimmen Sie die Position des Punktes $P(p_1|p_2|0)$.



185/2

HINWEIS
Beim Auftrag 4 ist CAS-Unterstützung sinnvoll.

DE Bei GPS werden grundsätzlich die Abstände zu drei (bzw. vier) Satelliten über Laufzeitunterschiede bestimmt.

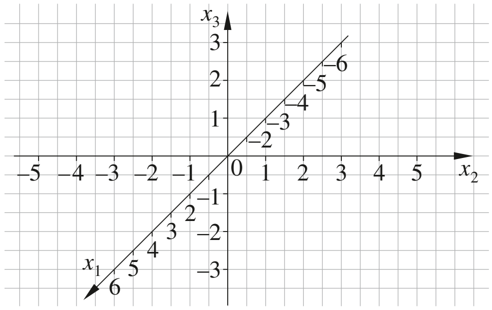
▶ Auftrag 2 wird bei der Erarbeitung verwendet.

▶ Beschreibung des Raumes durch Koordinaten

Für das Zeichnen von **räumlichen Koordinatensystemen** hat sich folgendes Verfahren bewährt:

Die x_1-Achse wird vom Ursprung aus unter 45° nach links unten gezeichnet, die Einheit ist die halbe Diagonalenlänge des Einheitsquadrats (vgl. Bild 186/1).

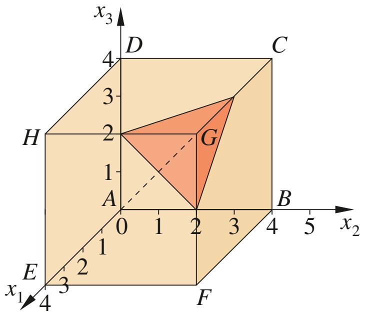
Diese Darstellung ist zwar unrealistisch, aber effektiv und anschaulich.



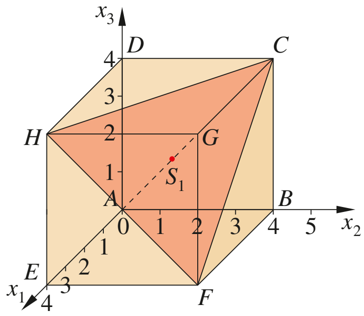
186/1: Räumliches Koordinatensystem

Schneidet man zunächst entlang der Ebene durch die Kantenmittelpunkte von $[HG]$, $[CG]$ und $[FG]$, dann ergibt sich als **Schnittfigur** ein (aus Symmetriegründen gleichseitiges) Dreieck. Die maximale Größe erreicht die dreieckige Schnittfigur durch H, F und C:

DE Würfel aus Blumensteckmasse oder Styropor erleichtern die Demonstration.

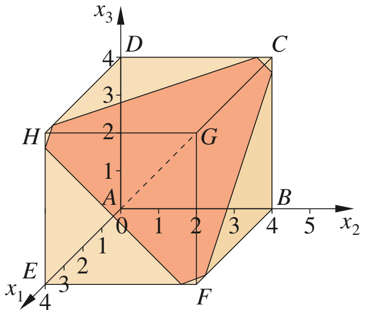


186/2

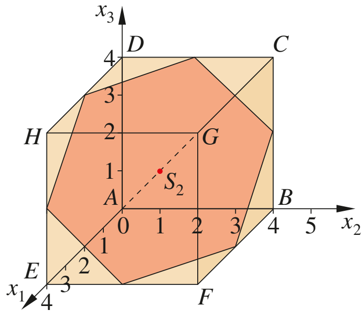


186/3

Verschiebt man die Schnittebene weiter entlang der Raumdiagonalen durch A und G, treten sechseckige Schnittflächen auf. Aus Symmetrieüberlegungen erkennt man, dass die Schnittfigur beim Schnitt durch die Kantenmittelpunkte von $[HD]$, $[CD]$, $[BC]$, $[BF]$, $[FE]$ und $[HE]$ sogar ein regelmäßiges Sechseck ist (Bild 186/5).



186/4

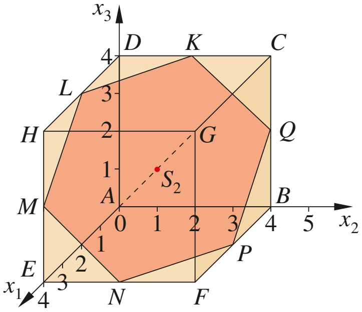


186/5

Wandert die Schnittebene weiter in Richtung Ursprung, ergeben sich ab dem Schnitt durch E, B und D wieder gleichseitige Dreiecke. Um die Lage der Eckpunkte des regelmäßigen Sechseckes zu beschreiben, ergänzen wir die aus der Ebene bekannte **Koordinatenschreibweise** $P(p_1|p_2)$ um eine dritte, die x_3-Koordinate, die hier im Bild die „Höhe" über der x_1, x_2-Ebene angibt. Man schreibt $P(p_1|p_2|p_3)$.

In einem räumlichen, kartesischen Koordinatensystem mit drei zueinander paarweise senkrechten Achsen durch den Ursprung lässt sich die Lage eines Punktes P im Raum beschreiben durch das Tripel $(p_1|p_2|p_3)$ seiner Koordinaten.

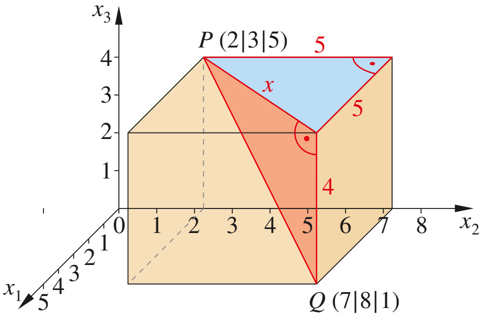
Die Koordinaten der Würfelecken sind dann $A(0|0|0)$, $B(0|4|0)$, $C(0|4|4)$, $D(0|0|4)$, $E(4|0|0)$, $F(4|4|0)$, $G(4|4|4)$ und $H(4|0|4)$.
Bezeichnet man die Ecken des regelmäßigen Sechsecks mit K, L, M, N, P und Q, dann ergeben sich die Koordinaten $K(0|2|4)$, $L(2|0|4)$, $M(4|0|2)$, $N(4|2|0)$, $P(2|4|0)$ und $Q(0|4|2)$.
Die Länge der Raumdiagonalen $[AG]$ ist der **Abstand** der Punkte A und G.



187/1

▶ Abstand zweier Punkte im Raum

Mithilfe des Satzes des Pythagoras kann man den Abstand zweier beliebiger Punkte, z. B. $P(2|3|5)$ und $Q(7|8|1)$, im Raum berechnen: P und Q können als die Endpunkte der Raumdiagonalen eines Quaders aufgefasst werden (Bild 187/2). Die Raumdiagonale $[PQ]$ ist die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen x und $|q_3 - p_3| = 4$, also $\overline{PQ}^2 = x^2 + (q_3 - p_3) = x^2 + 16$.
x ist Hypotenusenlänge in einem weiteren rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen $|q_1 - p_1| = 5$ und $|q_2 - p_2| = 5$, also $x^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 = 25 + 25 = 50$.
Damit ist $\overline{PQ}^2 = (q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2 = 16 + 25 + 25 = 66$, also $\overline{PQ} = \sqrt{66}$.
Die Länge der Raumdiagonalen $[AG]$ des Würfels im Bild 187/1 ist dann $\overline{AG} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$.



187/2

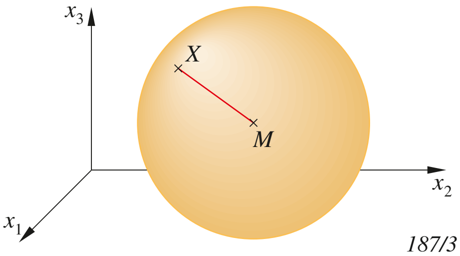
DE Als Beispiel für den „räumlichen Pythagoras“ kann die Ermittlung der Raumdiagonale im quaderförmigen Klassenzimmer dienen.

> **Satz 7.1** Der **Abstand zweier Punkte** $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$ ist
> $$\overline{PQ} = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$
> 187-1

Für alle Punkte $X(x_1|x_2|x_3)$ auf einer Kugel (siehe Bild 187/3) ist der Abstand vom Kugelmittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$ gleich dem Kugelradius r, es gilt also

$$\sqrt{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2} = r$$

Durch Quadrieren ergibt sich daraus die allgemeine **Gleichung der Kugel**:



187/3

> **Satz 7.2** Die **Gleichung der Kugel** um den Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$ mit dem Radius r lautet $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$.

Aufgaben

DE Die reichliche Anzahl von „Erarbeiten“-Aufgaben soll das räumliche Vorstellungsvermögen fördern und die Schülerinnen und Schüler an die dreidimensionalen Koordinaten gewöhnen.

Erarbeiten Anwenden Vernetzen

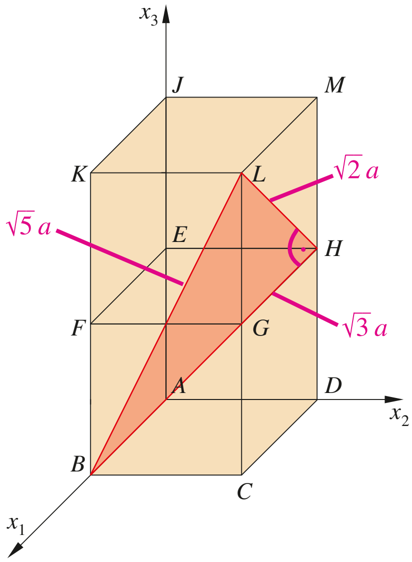
1 Ein Halbkreis aus Papier hat den Radius 4 und wird zu einem Kegel gebogen, dessen Spitze M auf der x_2-Achse liegt. Seine Grundfläche liegt in der Ebene $x_2 = 0$. Ermitteln Sie die Lage der Schnittpunkte des Kegels mit der x_1- bzw. der x_3-Achse.

DE Bei Aufgabe 1 ist ein Papiermodell eine sinnvolle Hilfe.

HINWEIS
Die Ebene $x_2 = 0$ ist die x_1-x_3-Ebene.

2 Zwei Würfel der Kantenlänge $\overline{AB} = a$ werden mit der Ecke A im Ursprung aufeinander gestapelt (Bild 188/1). Berechnen Sie die Seitenlängen des roten Dreiecks BHL. Zeigen Sie, dass es rechtwinklig ist und geben Sie an, wie viele andere Eckverbindungen hier kongruente Dreiecke liefern.

LÖ Siehe Abbildung 188/1. Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras gilt $LHB = 90°$.



188/1

3 Eine Fünfeckspyramide hat die Grundfläche $ABCDE$ mit $A(0|0|0)$, $B(5|0|0)$, $C(8|4|0)$, $D(4|9|0)$ und $E(-4|3|0)$ sowie die Spitze $S(0|2|3)$. Zeichnen Sie die Pyramide zunächst in ein Koordinatensystem und fertigen Sie anschließend ein Netz an.

DE Beim Pyramidennetz sind gemeinsame Seiten der Seitenflächen gleich lang.

4 Eine Kugel mit Radius 3 rollt vom Auflagepunkt $A(4|2|1)$ aus auf der Ebene $x_3 = 1$ in x_2-Richtung. In welchem Punkt P stößt sie gegen die Ebene $x_2 = 6$?

HINWEIS
Es sind zwei Lösungen möglich, fertigen Sie eine Skizze an!

LÖ Auflagepunkt:

	oben	unten
M	$(4\|2\|4)$	$(4\|2\|-2)$
P	$(4\|6\|4)$	$(4\|6\|-2)$

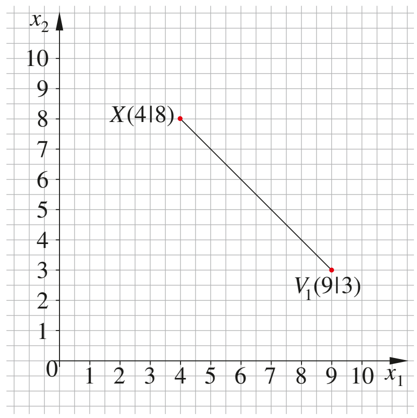
5 Zeichnen Sie die Menge aller Punkte, die die angegebene Gleichung erfüllen, in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

a) $x_2 = 2$ b) $x_1 = x_3$

6 Wo liegen alle Punkte P für $a \in \mathbb{R}$?

a) $P(0|a|0)$ b) $P(a|a|0)$

7 **„Topfschlagen“ – Ein Spiel für zwei Personen**
Als Spielfläche dient das Quadrat der Seitenlänge 10 im ersten Quadranten eines ebenen Koordinatensystems mit einer Ecke im Ursprung. Alle verwendeten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten. Spieler A zeichnet zwei solche Quadrate auf, im ersten wählt er einen „Zufallspunkt“ X (etwa $X(4|8)$, den sein Gegenspieler B ohne hinzusehen finden soll. Spieler B handelt in gleicher Weise.

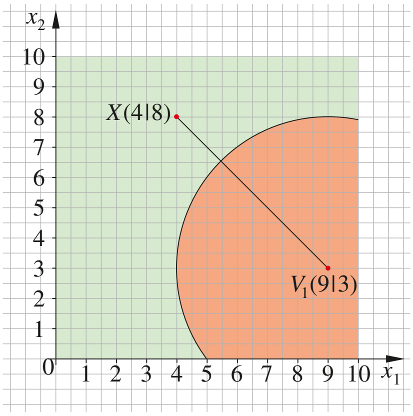


188/2

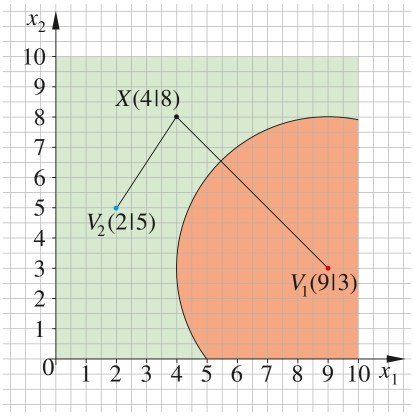
Spieler B beginnt und rät bei seinem ersten Versuch einen Punkt, etwa $V_1(9|3)$ (Bild 188/2). Spieler A berechnet den Abstand des geratenen Punktes von X, bei obigem Beispiel also
$\overline{V_1X} = \sqrt{(4-9)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$, und nennt Spieler B eine Farbe gemäß folgender Regel:

- Hat der Punkt vom gesuchten höchstens den Abstand 2, dann ist die Farbe grün („heiß“).
- Ist der Abstand größer als 2, aber höchstens 5, dann ist die Farbe gelb („lauwarm“).
- Bei einem Abstand von mehr als 5 ist die Farbe rot („eiskalt“).

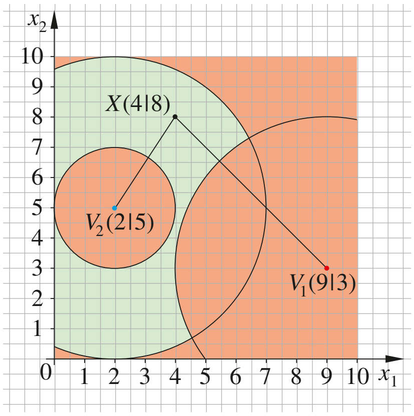
Bei dem Beispiel lautet die Farbe also „rot“ und Spieler B weiß damit, dass der gesuchte Punkt nicht im roten Bereich liegen kann, sondern nur im grünen (Bild 189/1).
Nach diesem Versuch ist Spieler A an der Reihe und rät seinerseits erstmalig bei Spieler B. Die beiden wechseln sich immer ab, bis der erste von beiden den gesuchten Punkt gefunden hat und damit gewinnt. B könnte beim zweiten Versuch etwa $V_2(2|5)$ wählen (Bild 189/2).
Dieser Punkt liegt „im gelben Bereich“, denn es ist $\overline{V_2X} = \sqrt{(4-2)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$. Der gesuchte Punkt X kann also nur noch in dem in Bild 189/3 dargestellten Grünbereich liegen.



189/1

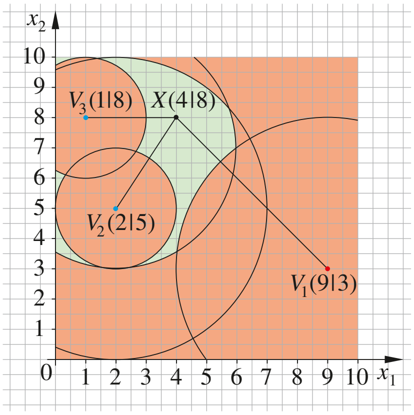


189/2

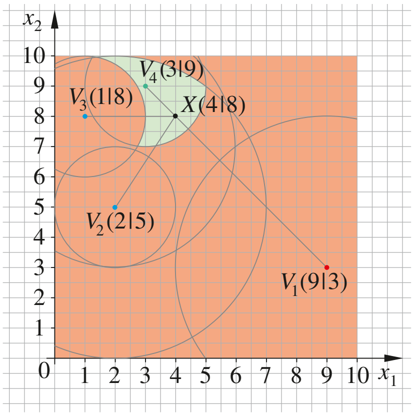


189/3

Weiterhin könnte das Spiel etwa so verlaufen wie in den Bildern 189/4 und 189/5 dargestellt. Beim fünften Versuch hätte B also gute Chancen, den richtigen Punkt zu raten.



189/4



189/5

a) Spielen Sie das oben beschriebene Spiel.
b) Als Spielbereich dient jetzt der Würfel der Seitenlänge 10 im ersten Oktanten des räumlichen Koordinatensystems mit einer Ecke im Ursprung, alle verwendeten Punkte haben (drei!) ganzzahlige Koordinaten. Sonst sind die Regeln gleich … Viel Spaß!

Aufgaben

DE Mithilfe geeigneter Schnitte bzw. Projektionen lässt sich Aufgabe 8 gut lösen.

LÖ
$\overline{AB} = 3\sqrt{2}$
$\overline{BC} = \sqrt{59}$
$\overline{CA} = \sqrt{21}$

8 Die Grundfläche eines Kegels mit Spitze $S(0|0|5)$ liegt in der Ebene $x_3 = 0$. Der Mittelpunkt der Grundfläche ist $(0|0|0)$, ihr Radius 3. Liegen die Punkte $A(0|1|1)$, $B(2|2|0)$, $C(3|1|0)$, $D(0|1|2)$, $E(0|1|3)$ und $F(0|1|4)$ jeweils auf dem Kegel, innerhalb oder außerhalb?

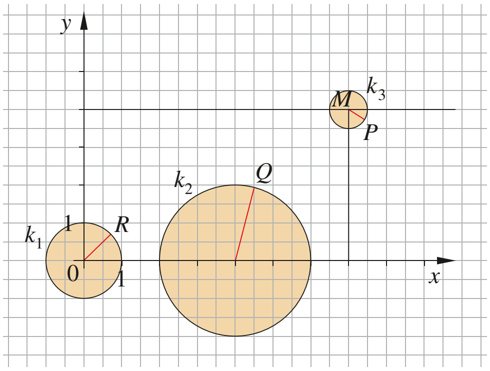
9 Berechnen Sie paarweise die Abstände der Punkte $A(1|2|0)$, $B(0|3|4)$ sowie $C(5|0|-1)$. Zeichnen Sie das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem und anschließend in wahrer Größe.

DE Aufgabe 10 soll den Übergang von den Kreisen in der Ebene zu den Kugeln im Raum erleichtern.

DUP 190-0

10 Gleichungen für Kreis und Kugel

a) Die Punkte auf der Kreislinie k_1 in Bild 190/1 (wie beispielsweise R) haben alle den Abstand $r = 1$ vom Ursprung $(0|0)$. Mit dem Satz des Pythagoras gilt für diese Punkte $x^2 + y^2 = 1^2$.
Die Punkte auf der Kreislinie k_2 (wie Q) haben alle den Abstand $r = 2$ vom Mittelpunkt $(4|0)$. Für diese Punkte gilt $(x-4)^2 + y^2 = 2^2$.
Geben Sie eine entsprechende Gleichung an für die Koordinaten der Punkte auf der Kreislinie k_3.



190/1

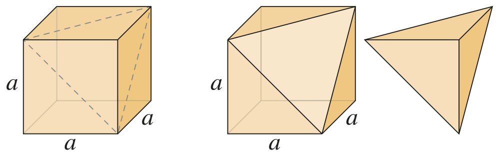
b) Bestimmen Sie die Gleichung aller Punkte im Raum, die von dem „Mittelpunkt“ $M(1|2|3)$ den Abstand 5 haben. Liegen die Punkte $A(-4|2|3)$, $B(1|2|8)$, $C(4|2|6)$ und $D(4|2|7)$ auf der Kugeloberfläche, innerhalb der Kugel oder außerhalb der Kugel?

LÖ Quadrat der Seitenlänge 2 mit den Eckpunkten $(1|4|2)$, $(3|4|2)$, $(1|6|2)$ und $(3|6|2)$.

11 Zeichnen und beschreiben Sie die Punktmenge $\{P(a|b|2) \mid a \in [1; 3] \wedge b \in [4; 6]\}$.

HINWEIS
Die Höhen im gleichseitigen Dreieck teilen sich im Verhältnis 2 : 1.

12 Ein Würfel der Kantenlänge a wird durch einen ebenen Schnitt entlang dreier benachbarter Flächendiagonalen in zwei Teile geschnitten (Bild 190/2). Berechnen Sie Volumen und Oberflächeninhalt der entstehenden Körper sowie alle auftretenden Winkel.



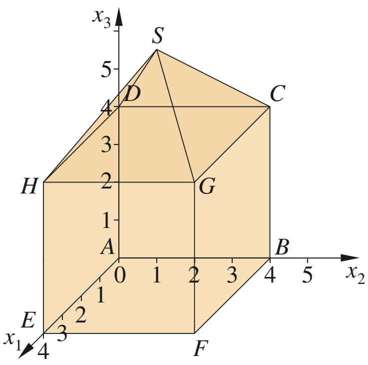
190/2

DE Bei den Aufgaben 13 und 14 gibt es mehrere Möglichkeiten. Die Aufgaben 13 bis 15 eignen sich gut für Gruppenarbeit.

13 Bei einem Würfel wird durch einen ebenen Schnitt „eine Ecke abgeschnitten“. Wie viele Ecken hat der Restkörper?

14 Ein Zylinder wird eben durchgeschnitten. Welche Schnittflächenformen können vorkommen?

15 Zeichnen Sie das Viereck $EHSC$ des Würfels mit Pyramidendach (Bild 190/3) in wahrer Größe und berechnen Sie alle Größen der Innenwinkel, die Diagonalenlängen sowie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts T. Die Spitze hat die Koordinaten $S(2|2|6)$.

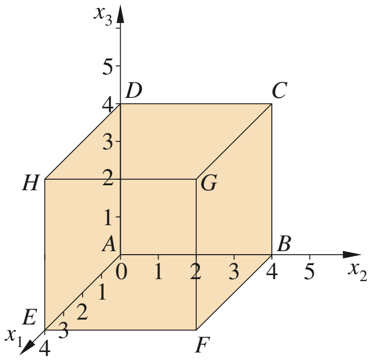


190/3

16 Der Würfel von Bild 191/1 soll entlang der Ebene durch die Punkte $P(4|1|0)$, $Q(4|2|4)$ und $R(0|4|2)$ zerschnitten werden.

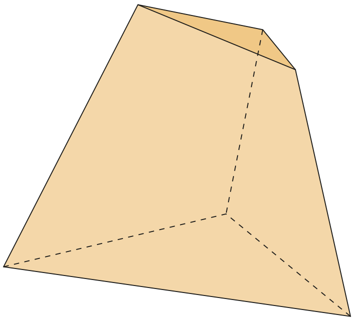
a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Würfels und ergänzen Sie darin P, Q und R.

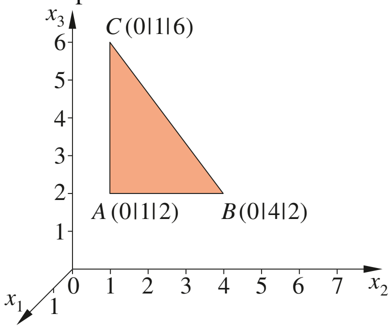
b) Zeichnen Sie die Schnittfigur in wahrer Größe und berechnen Sie alle Längen.



191/1

17 Kann der Körper in Bild 191/2 ein Pyramidenstumpf sein?


191/2



191/3

HINWEIS
Schneidet man bei einer Pyramide eine Ecke eben ab, ist der Restkörper ein **Pyramidenstumpf**.

DE Bei einem Pyramidenstumpf müssen sich die Verlängerungen der Seiten in einem gemeinsamen Punkt treffen.

18 Das Dreieck ABC (Bild 191/3) rotiert um die x_3-Achse.

a) Beschreiben Sie den entstehenden Rotationskörper.

b) Wie liegen die Punkte $P(0|2|3)$, $Q(1|2|3)$, $R(2|2|3)$ und $S(3|2|3)$ bezüglich dieses Körpers?

DE Aufgabe 18 lässt sich durch geeignete Schnittfiguren gut lösen.

19 In der holländischen Stadt Helmond hat der Architekt Piet Blom in den siebziger Jahren würfelförmige „Baumhäuser" entworfen (Kantenlänge ca. 7 m), die auf einer Ecke stehen (Bild 191/4). Die Lage der Zwischendecken eines solchen Hauses zeigt Bild 191/5.


191/4 Baumhäuser in Helmond

a) Welche Form hat der Eingangssockel?

b) Basteln Sie aus 12 Holzstäbchen, Pappe und Kleber ein Modell.

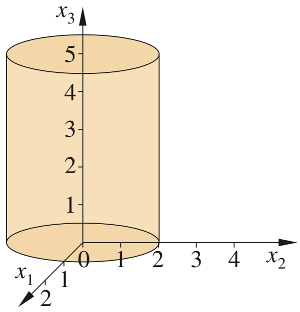
c) Zeichnen Sie einen Grundriss (Maßstabsvorschlag 1 : 35) und überlegen Sie sich eine sinnvolle Raumaufteilung.

d) Berechnen Sie die Fläche des mittleren Bodens.

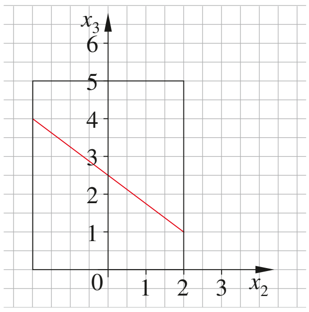

191/5

DE Aufgabe 19 b) erfordert Material und viel Zeit.

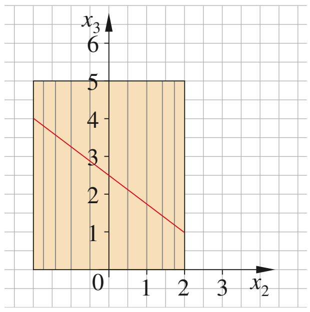
20 Legen Sie zwei leere Küchenrollen (Papprohr innen), zwei Papprollen von Toilettenpapier, Dosen oder ähnliche zylindrische Körper bereit. Schneiden Sie den einen Zylinder (etwa mit einem Brotmesser) schräg, aber eben durch, schlitzen Sie den Zylindermantel anschließend längs auf und rollen ihn ab. Bild 192/1 zeigt ein Schrägbild, Bild 192/2 die Ansicht in Blickrichtung x_1-Achse und Bild 192/3 dieselbe Blickrichtung zusätzlich mit einer gleichmäßigen Winkeleinteilung (als Tipp), also mit parallelen Linien im gleichen Abstand.



192/1



192/2

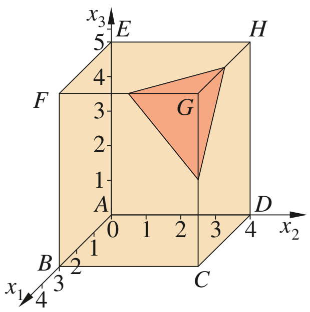


192/3

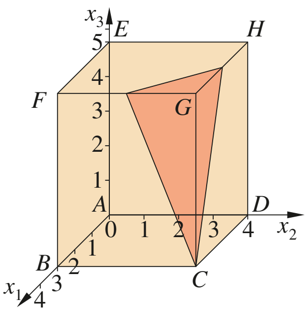
a) Welche Schnittlinie vermuten Sie?
b) Schneiden Sie eine Periodenlänge einer Kosinuskurve sauber aus und fügen Sie die beiden Enden wie eine Rolle zusammen: Ist die „Schnittfläche" eben?
c) Schlitzen Sie nun den anderen Zylinder erst längs auf, rollen ihn aus und zeichnen Sie eine symmetrische, V-förmige Linie ein, entlang der Sie nun abschneiden. Rollen Sie einen Teil wieder zusammen und testen Sie, ob die Schnittfläche eben ist.

DE Das Material kann bereitgestellt werden. Alternative: Die Bastelarbeiten werden in einer vorbereitenden Hausaufgabe angefertigt.

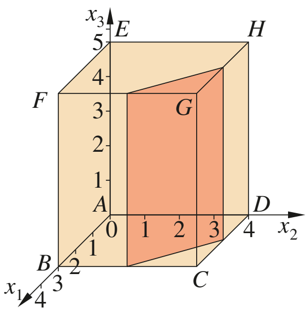
21 Fertigen Sie aus Pappe einen Quader mit Höhe 5 cm, Länge 3 cm und Breite 4 cm. Zeichnen Sie ein Netz des Quaders sowie ein Schrägbild ins Koordinatensystem mit zueinander passenden Bezeichnungen. Legen Sie einen Gummiring zunächst durch drei benachbarte Kantenmittelpunkte (Bild 192/4), zeichnen Sie die entsprechenden Linien auch farbig im Netz ein und beschreiben Sie die Schnittfigur. Gehen Sie entsprechend vor bei weiteren Gummiring-Stellungen.



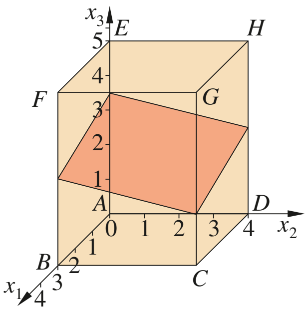
192/4



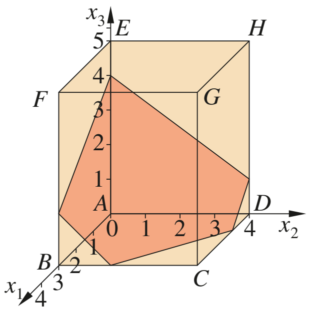
192/5



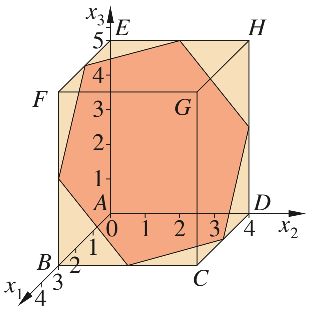
192/6



192/7



192/8



192/9

Noch fit?

I In einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse $b = 3$ und $\alpha = 35°$ sollen die Kathetenlängen berechnet werden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis zeichnerisch.

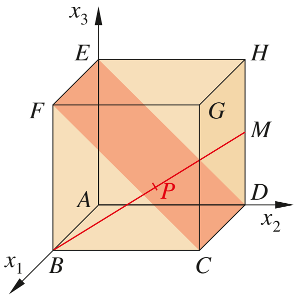
II Bestimmen Sie am Einheitskreis folgende Werte:
$\sin 30°$; $\sin 3645°$; $\cos 240°$; $\cos 450°$; $\sin 90°$; $\cos 180°$

III Skizzieren Sie den Graphen von $f(x) = 3\sin(2x) - 1$ für $x \in [-\pi; 3\pi]$.

Erarbeiten | **Anwenden** | Vernetzen

22 Begründen oder widerlegen Sie:
Vier Punkte A, B, C und D, die nicht in einer Ebene liegen, liegen immer auf einer Kugel.

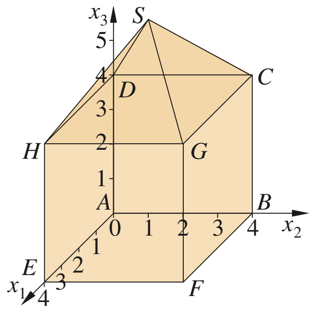
23 Ein Würfel $ABCDEFGH$ (Bild 193/1) der Kantenlänge a liegt mit der Ecke A im Ursprung eines Koordinatensystems, die Mitte der Kante $[DH]$ ist M. Die Gerade BM schneidet die Diagonalebene durch E, F, C (und auch D) im Punkt P. Zeichnen Sie jeweils die Ansicht in Richtung der x_1-, der x_2- und der x_3-Achse und leiten Sie daraus Gleichungen für die Koordinaten p_1, p_2 und p_3 von P her.



193/1

24 Ein Würfel soll durch einen ebenen Schnitt so in zwei Teile zerlegt werden, dass die Schnittfigur möglichst viele Ecken hat.

25 Setzen Sie bei dem Würfel mit Pyramidendach von Bild 193/2 einen ebenen Schnitt, sodass die Schnittfigur möglichst viele Ecken besitzt.



193/2

26 Bei einem geeigneten, ebenen Schnitt durch einen Würfel mit Kantenlänge a entsteht ein regelmäßiges Sechseck. Inwieweit unterscheiden sich die Radien von Sechsecksumkreis und Umkugel des Würfels?

27 Bild 193/3 zeigt einen Würfel mit den Eckpunkten $A(12|0|0)$, $B(12|12|0)$ und $D(0|0|0)$.

a) Zeichnen Sie den Würfel $ABCDEFGH$ in ein Koordinatensystem.

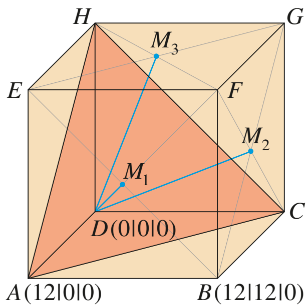
b) Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte des Würfels.

c) Welche Koordinaten haben die Diagonalenschnittpunkte M_1, M_2 und M_3 der Quadrate $ABFE$, $BCGF$ bzw. $EFGH$?

d) Bestimmen Sie den Schnittpunkt N der Raumdiagonalen $[DF]$ mit dem Dreieck ACH unter Ausnutzung der Symmetrie.

e) Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt M von $[DF]$ mit dem Dreieck $M_1M_2M_3$?

f) In welchen Punkten schneiden die Strecken $[DM_1]$, $[DM_2]$ und $[DM_3]$ das Dreieck ACH?
Achten Sie auf Symmetrie!



193/3

DE Die „Anwenden"-Aufgaben setzen eine gründliche Vertrautheit mit räumlichen Koordinaten und Schrägbilddarstellungen voraus, die hier vertieft werden sollen.

DE Hilfestellung für Aufgabe 22: Suche auf dem Lot zur Ebene, in der Dreieck ABC liegt, durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC nach einem Punkt M, für den $\overline{AM} = \overline{DM}$ gilt. Als rechnerische Alternative bieten sich quadratische Gleichungen für die vier gleichen Abstände an.

DE In der anspruchsvollen Aufgabe 26 wird ein ebenes Problem (Umkreis eines Sechsecks) mit einem räumlichen Problem verbunden. Der Hinweis auf die Raum- und Flächendiagonalen kann helfen.

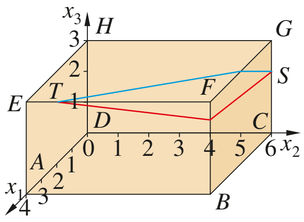
DE Die recht schweren Teilaufgaben d) bis f) können auch weggelassen werden.

DE Die Aufgaben 28 bis 30 sind recht anspruchsvoll.

HINWEIS
Verwenden Sie verschiedene Netze als Hilfsmittel.

LÖ Der kürzeste Weg führt über $Y(0|5|3)$ auf $[HG]$.

28 Auf der Oberfläche eines Quaders (Bild 194/1) mit Länge $\overline{AB} = 6$, Breite $\overline{BC} = 4$ und Höhe $\overline{AE} = 3$ sitzen zwei Spinnen an den Kanten (in T auf $[EF]$ mit $\overline{TE} = 1$ und in S auf $[GC]$ mit $\overline{GS} = 1$).
Geben Sie die Koordinaten aller genannten Punkte an und bestimmen Sie den kürzesten Weg von S nach T entlang der Oberfläche. Geben Sie ebenfalls die Koordinaten der Knickpunkte auf dem Weg an.

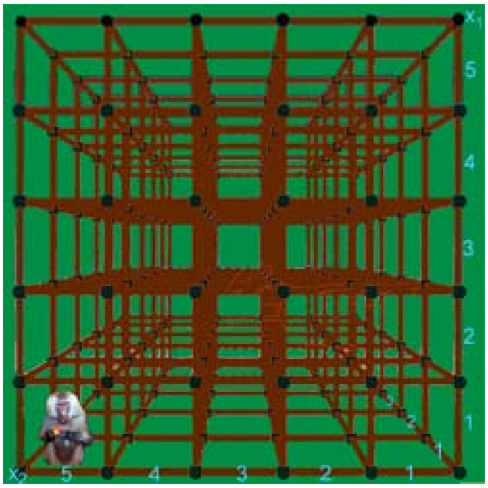


194/1

HINWEIS
Zeichnen Sie ein geeignetes Netz.

29 Die Punkte $A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$ und $C(0|4|0)$ legen zusammen mit dem Ursprung die Grundfläche einer Rechteckspyramide fest, deren Spitze $S(2|2|2\sqrt{2})$ ist.
Bestimmen Sie zeichnerisch den kürzesten Weg von der Mitte der Strecke $[AS]$ zur Mitte der Strecke $[BC]$, der ausschließlich auf der Oberfläche der Pyramide verläuft. Geben Sie auch die Koordinaten der Punkte an, an denen der Weg einen Knick aufweist.

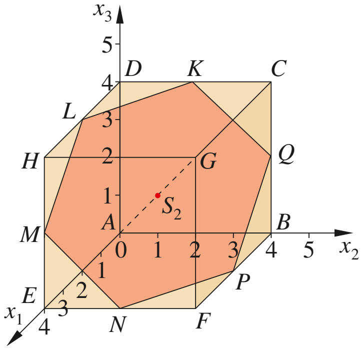
30 Pavianjüngling Paul befindet sich im Feld $(1|5|1)$ des neuen Klettergerätes im Zoo. Er möchte Paviandame Patricia im Punkt $(5|1|5)$ besuchen, ohne dabei aber dem Oberpavian in $(3|3|3)$ zu nahe zu kommen (d.h. nicht näher als Abstand 1, nur ganzzahlige Koordinaten sind zulässig). Finden Sie einen minimalen Weg für Paul.


194/2

31 Beschreiben und zeichnen Sie die Menge aller Punkte $X(x_1|x_2|x_3)$, für die gilt:
a) $x_1^2 + x_2^2 = 4$; $x_3 = 3$
b) $(x_1 - 5)^2 + x_2^2 = 4$; $x_3 = 3$
c) $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 = 4$; $x_3 = 3$
d) $x_1^2 + x_2^2 = 4$
e) $x_1^2 + x_3^2 = 9$; $0 \le x_2 \le 5$
f) $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$

HINWEIS
Wählen Sie zur Höhenberechnung eine geeignete ebene Schnittfigur

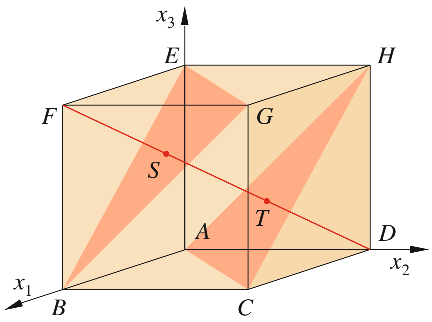
32 Berechnen Sie die Volumina der Teilkörper, die bei dem ebenen Schnitt eines Würfels der Kantenlänge 4 entstehen, wenn die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist (Bild 194/3).



194/3

33 Eine Pyramide $ABCS$ hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit $A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$ und $C(c_1|c_2|0)$, die Seitenkanten haben die Länge 6.
a) Skizzieren Sie ein Netz dieser Pyramide.
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C und S.
c) Berechnen Sie die Höhe und das Volumen der Pyramide (Tipp: geeignete Schnittflächen legen!).
d) Die Pyramide wird nun auf halber Höhe abgeschnitten, es bleibt u. a. ein Pyramidenstumpf übrig. Welches Volumen besitzt er? Zeichnen Sie die Schnittlinien auch ins Netz ein.

34 Bestimmen Sie die Koordinaten der Würfeleckpunkte sowie der beiden Schnittpunkte S und T der Raumdiagonalen $[FD]$ mit den Dreiecken BEG bzw. ACH in Bild 195/1.
Die Kantenlänge des Würfels ist a.



195/1

35 Führen Sie nacheinander je eine 180°-Drehung um die x_1-Achse, die x_2-Achse und die x_3-Achse aus. Wie verändern sich dabei die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P(p_1|p_2|p_3)$?

Erarbeiten Anwenden **Vernetzen**

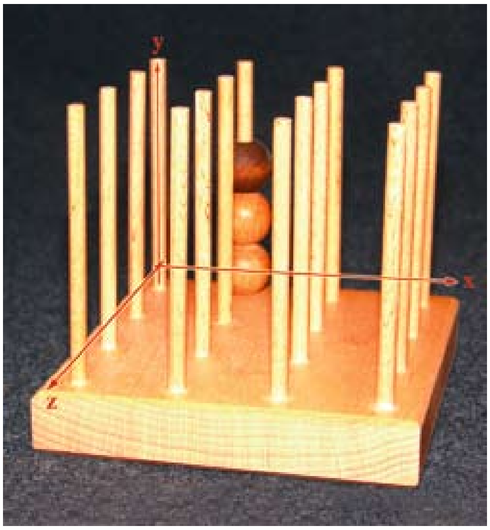
36 Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das gleiche, ebene „Haus vom Nikolaus" zu zeichnen?

LÖ Je nachdem, ob mit oder ohne Symmetrie: 44 bzw. 88.

37 Läuft eine Ameise das „Haus vom Nikolaus" ab, dann muss sie sich an jeder Ecke um einen bestimmten Winkel drehen. Hängt der Gesamtdrehwinkel vom gewählten Weg ab?

DE Aufgabe 37 eignet sich gut für Gruppenarbeit.

38 Spielen Sie mit einem Mitschüler eine Runde virtuelles „Vier gewinnt" (mit ebenen Koordinaten) und anschließend „Kugelmühle" (räumliche Variante). Dabei schreiben die Spieler abwechselnd die Position der gerade „gesetzten" Kugel als Koordinatentripel $(x|y|z)$ auf (Beispiel: $(1|2|0)$ beschreibt die Lage der dunklen Kugel im Bild 195/2). Sammeln Sie alle Kriterien, wie man eine Viererreihe an den Koordinaten erkennt.



195/2

39 Eine Pyramide $ABCS$ mit $A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$, $C(0|4|0)$ und $S(0|0|5)$ soll parallel zum Dreieck ABC so geschnitten werden, dass die Teilvolumina gleich groß sind. Welche x_3-Koordinate haben alle Punkte der Schnittebene?

40 Beschreiben Sie den Körper, den alle Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ mit
a) $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 4$ b) $p_1^2 + p_2^2 = 9$ c) $p_1^2 + p_2^2 = \frac{1}{4}p_3$
bilden.

DE Der Fachbegriff zu 40c) ist nicht bekannt. Eine Skizze zur Beschreibung bietet sich an.

LÖ
a) Kugel um den Ursprung mit dem Radius 2.
b) Zylinder um die x_3-Achse mit dem Radius 3.
c) Rotationsparaboloid um die x_3-Achse.

41 Auf welcher Kurve liegen alle Punkte P mit den Koordinaten $(\sin z|\cos z|z)$? Geben Sie die Gleichungen entsprechender Linien um die anderen Koordinatenachsen an.

LÖ Schraubenlinie um die x_3-Achse mit dem Radius 1.

DUP 195-0

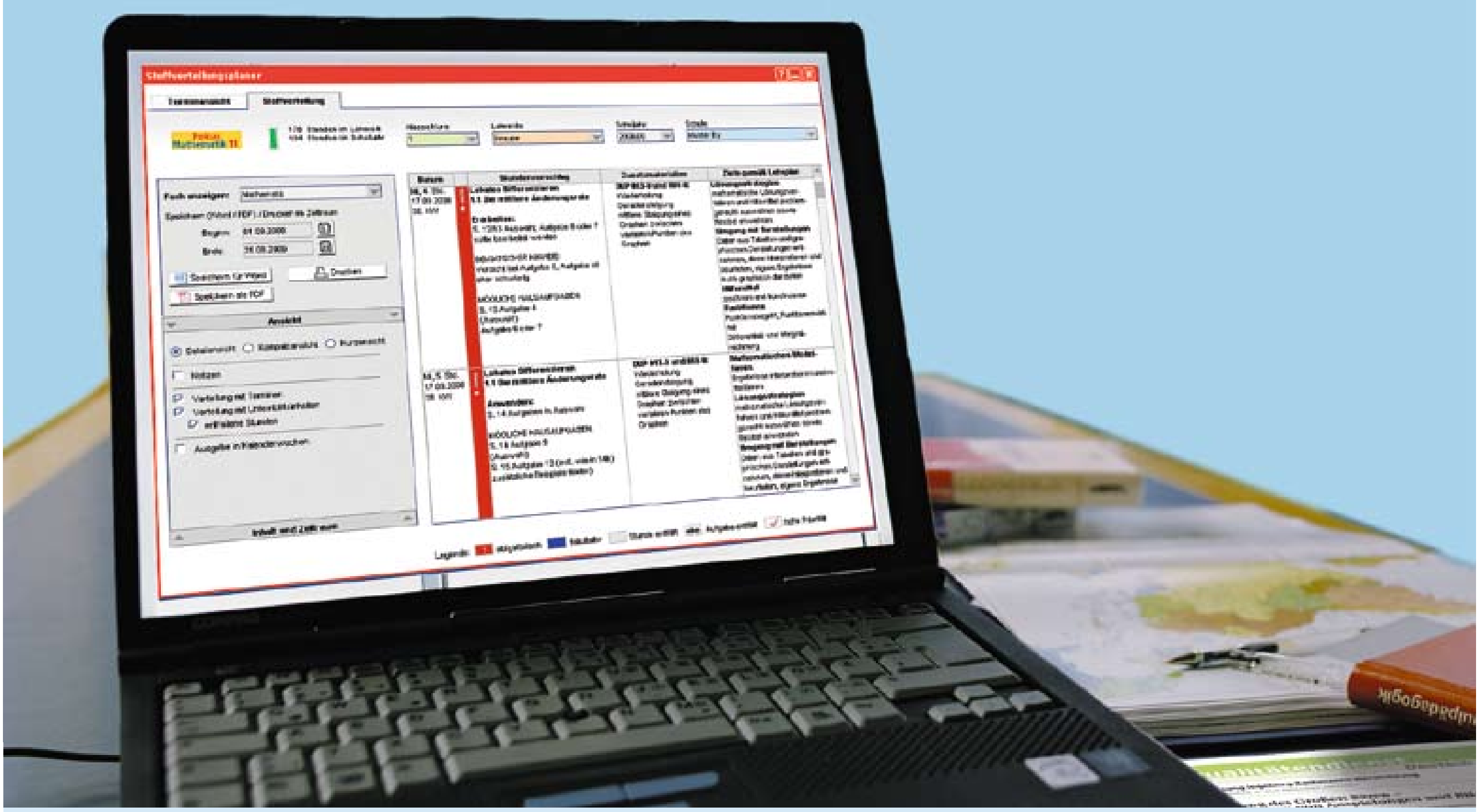
Die kommende Stunde? Hab ich auf dem Rechner!

Der digitale Unterrichtsplaner in der Schülerbuch – Lehrerfassung von Fokus Mathematik Bayern

Effiziente Vorbereitung am PC

Mit einem Stoffverteilungsplaner erstellen Sie am Computer schnell Ihre tagesgenaue Jahresplanung. Dazu liefert Ihnen die Software

- PDF-Dateien der passenden Schülerbuchseiten;
- Abbildungen aus dem Schülerbuch plus weitere Schaubilder, Animationen, Simulationen;
- editierbare Arbeitsblätter mit Lösungsbögen und interaktive Tests;
- den vollständigen Inhalt der CD des Schülerbuchs.



Cornelsen Verlag • 14328 Berlin
www.cornelsen.de

Willkommen in der Welt des Lernens

Cornelsen