Klassifikation der affinen Abbildungen der Ebene

Die Klassifikation der affinen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{x} \mapsto \mathrm{A}\cdot\vec{x}+\vec{c}$ erfolgt nach denselben Kriterien wie die Klassifikation der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{x} \mapsto \mathrm{A}\cdot\vec{x}$. Insbesondere ist jede lineare Abbildung auch eine affine Abbildung. Siehe dazu Medienelement 084-1.

Bei denjenigen linearen Abbildungen, die genau einen Fixpunkt haben, also bei der zentrischen Streckung, der Drehstreckung, der Euler-Affinität und der Streckscherung ändert die Addition eines Verschiebungsvektors $\vec{c}$ die Eigenschaften der Abbildung nicht wesentlich. Die entsprechenden affinen, nicht-linearen Abbildungen haben ebenfalls genau einen Fixpunkt, nur, dass dies nicht wie bei einer linearen Abbildung der Koordinatenursprung (0;0) ist.
So ist beispielsweise die Abbildung $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \vec{c}$ mit $\lambda \neq 1$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ eine zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor λ, allerdings nicht wie die Abbildung $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$ mit dem Streckungszentrum (0;0), sondern mit dem Streckungszentrum $\frac{1}{1-\lambda}(c_1;\, c_2)$.
Die Abbildung $\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\vec{x} + \vec{c}$ mit $\cos\alpha \neq 1$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ ist eine Drehung um den Winkel α um den Fixpunkt $\frac{1}{2(1-\cos\alpha)}\begin{pmatrix}c_1\cdot(1-\cos\alpha)-c_2\cdot\sin\alpha\\ c_1\cdot\sin\alpha+c_2\cdot(1-\cos\alpha)\end{pmatrix}$.

Die Menge der Fixpunkte bildet stets einen affinen Unterraum des $\mathbb{R}^2$. Wenn es also mehr als einen Fixpunkt gibt, so gibt es mindestens eine Fixpunktgerade oder jeder Punkt des $\mathbb{R}^2$ ist Fixpunkt. Diese Fälle treten bei Scherungen, Parallelstreckungen und bei der Identität auf.
Wird bei Scherungen bzw. Parallelstreckungen noch ein Verschiebungsvektor addiert, der nicht parallel zur Scherungsachse bzw. zur Streckungsachse ist, so entstehen sogenannte Schubscherungen bzw. Schub-Parallelstreckungen. Diese Abbildungen haben, ebenso wie die Parallelverschiebung, keine Fixpunkte.

Eine klassifizierende Übersicht über die affinen Abbildungen der Ebene $\mathbb{R}^2$ befindet sich auf der nächsten Seite.

Übersicht über die affinen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x} + \vec{c}$

Fixpunkte die affinen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x} + \vec{c}$	**Eigenwerte der zugehörigen lin. Abb. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x}$**	**Eigenschaften der Abbildung**	**Name der Abbildung**	**Beispiel für eine entsprechende Abbildung**
Die Abbildung hat **keinen Fixpunkt**.	genau ein Eigenwert $\lambda = 1$; $\dim \mathbb{E}_\lambda = 2$	Alle Geraden in Richtung des Translationsvektors $\vec{c}$ sind Fixgeraden.	Translation (Parallelverschiebung)	$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$
	genau ein Eigenwert $\lambda = 1$; $\dim \mathbb{E}_\lambda = 1$	Die Abbildung hat keine Fixgerade.	Schubscherung	$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$
	zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 \neq 1$	Die Abbildung hat genau eine Fixgerade.	Schub-Parallelstreckung	$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$, $\lambda \neq 1$, $\vec{c} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$
Es gibt genau **einen Fixpunkt**.	keine Eigenwerte	Es gibt keine Fixgeraden und keine Fixrichtungen.	Drehung oder Drehstreckung	$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$, $b \neq 0$
	genau ein Eigenwert $\lambda \neq 1$; $\dim \mathbb{E}_\lambda = 2$	Alle Geraden durch den Fixpunkt sind Fixgeraden.	zentrische Streckung	$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$, $\lambda \neq 1$
	genau ein Eigenwert $\lambda \neq 1$; $\dim \mathbb{E}_\lambda = 1$	Es gibt genau eine Fixgerade; jeder Eigenvektor zum Eigenwert λ ist ein Richtungsvektor dieser Geraden.	Streckscherung	$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$, $\lambda \neq 1$
	zwei Eigenwerte $\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1$	Es gibt genau zwei Fixgeraden, deren Richtungen durch die Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 bestimmt sind.	Euler-Affinität	$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{c}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$
Es gibt eine **Fixpunktgerade**.	genau ein Eigenwert $\lambda = 1$; $\dim \mathbb{E}_\lambda = 1$	Jeder Eigenvektor zum Eigenwert λ ist ein Richtungsvektor der Fixpunktgeraden.	Scherung	$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$
	zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 \neq 1$	Jeder Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ist ein Richtungsvektor der Fixpunktgeraden.	Parallelstreckung	$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 1, c \in \mathbb{R}$
Jeder Punkt des $\mathbb{R}^2$ **ist Fixpunkt**.	genau ein Eigenwert $\lambda = 1$, $\dim \mathbb{E}_\lambda = 2$	Jeder Punkt des $\mathbb{R}^2$ wird auf sich selbst abgebildet.	Identität	$\vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$